Generatory liczb losowych dla podstawowych rozkładów prawdopodobieństwa

- **Rozkłady ciągłe.**
  - ▷ **Rozkład wykładniczy.**
  - ▷ **Rozkład normalny (Gaussa).**
  - ▷ **Rozkład Cauchy'ego (Breita–Wignera).**
  - ▷ **Rozkład potęgowy.**
  - ▷ **Rozkłady α-stabilne.**
- **Rozkłady dysktretne.**
  - ▷ **Rozkład dwumianowy.**
  - ▷ **Rozkład Poissona.**
  - ▷ **Rozkład geometryczny.**
  - ▷ **Pewna metoda ogólna.**
- **Rozkłady wielowymiarowe.**
  - ▷ **Metody ogólne.**
  - ▷ **Rozkład równomierny na sferze i kuli w $\mathbb{R}^m$.**
  - ▷ **Rozkład równomierny na sympleksie i na powierzchni sympleksu.**

Rozkład wykładniczy $E(\theta,\lambda)$:

▶ Gęstość prawdopobieństwa:

$$\rho_{\theta,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda}\, e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}\,, \qquad x \geq \theta\,.$$

$\longrightarrow$ Transformacja liniowa:

$$x \longrightarrow x' = \frac{x-\theta}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad E(\theta,\lambda) \rightarrow E(0,1)\colon \rho_{0,1}(x') = e^{-x'},\; x' \geq 0.$$

A. Metoda odwracania dystrybuanty:

$$X' = -\ln R,\;\; R \in \mathcal{U}(0,1), \quad \Rightarrow \quad X = \lambda X' + \theta\,.$$

B. Metoda serii monotonicznych (J. von Neumann, 1951) – rozkład $E(0,1)$:

1. Generujemy ciąg $U_1, U_2, \ldots \in \mathcal{U}(0,1)$.
2. Obserwujemy serie postaci: $U_1 \geq U_2 \geq \ldots \geq U_n < U_{n+1}$ i numerujemy je kolejnymi liczbami $0, 1, 2, \ldots$.
3. Numer pierwszej serii, której długość n jest liczbą **nieparzystą** przyjmujemy za **część całkowitą** generowanej liczby losowej X, natomiast wartość R_1 pierwszej liczby w tej serii – za jej **część ułamkową**.

$\Rrightarrow$ Ćw. N9.1: Używając metody serii monotonicznych wygenerować rozkład $E(0,1)$. Wykonać histogram i porównać z wykresami funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty.

Rozkład normalny (Gaussa) $N(\mu,\sigma)$:

▶ Gęstość prawdopobieństwa:

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,, \qquad -\infty < x < +\infty\,.$$

$\longrightarrow$ Zamiana zmiennych (transformacja liniowa):

$$x \to x' = (x-\mu)/\sigma \quad \Rightarrow \quad N(\mu,\sigma) \to N(0,1):\ \phi_{0,1}(x') = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-x'^2/2}.$$

A. Metoda oparta o centralne twierdzenie graniczne $\longrightarrow$ patrz wykład 1.

▷ Dobra dla obszaru centralnego, zła dla „ogonów” rozkładu!

B. Metoda odwracania dystrybuanty – w jednym wymiarze:

▷ W jednym wymiarze dystrybuanta nie jest odwracalna analitycznie – czasem stosuje się pewne przybliżenia dla funkcji odwrotnej do dystrybuanty, np. (Odeh i Evans, 1974):

$$\Phi^{-1}(u) = \begin{cases} g(u), & 10^{-20} < u < 0.5, \\ -g(1-u), & 0.5 < u < 1 - 10^{-20}, \end{cases} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} g(u) &= t - \frac{L(t)}{M(t)}, \\ t &= \sqrt{-2\ln u}, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} L(t) = {}& 0.322232431088 + t + 0.342242088547t^2 + 0.0204231210245t^3 \\ & + 0.0000453642210148t^4, \\ M(t) = {}& 0.099348462606 + 0.588581570495t + 0.531103462366t^2 \\ & + 0.10353775285t^3 + 0.0038560700634t^4. \end{aligned}$$

C. Metoda odwracania dystrybuanty – w dwóch wymiarach:

▶ Gęstość prawdopobieństwa:

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,, \qquad -\infty < x, y < +\infty\,.$$

▷ Przechodzimy do współrzędnych biegunowych:

$$(x,y) = (r\cos\phi, r\sin\phi), \qquad 0 \le \phi < 2\pi, \quad 0 \le r < +\infty,$$

$$\Rightarrow \text{faktoryzacja: } \tilde{\rho}(\phi, r) = f(\phi)\, g(r), \qquad \text{gdzie: } f(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad g(r) = r\, e^{\frac{-r^2}{2}}.$$

$\longrightarrow$ Zmienną kątową generujemy z rozkładu równomiernego, a zmienną radialną przez odwrócenie dystrybuanty.

▷ Niech $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(0,1)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{-2\ln U_1}\, \cos(2\pi U_2) \\ y &= \sqrt{-2\ln U_1}\, \sin(2\pi U_2) \end{aligned}\right\} \text{ niezależne zmienne losowe o rozkładach } N(0,1).$$

▶ Zalety: Dokładna i prosta w użyciu!

▶ Wada: Czasochłonne obliczanie funkcji logarytmicznych i trygonometrycznych!

D. Metoda Marsaglii i Braya (1964):

TWIERDZENIE:

Jeżeli: $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(-1,1)$ – niezależne zmienne losowe,

to przy warunku: $U_1^2 + U_2^2 \leq 1$, zmienne losowe:

$$X_1 = U_1 \sqrt{\frac{-2\ln(U_1^2+U_2^2)}{U_1^2+U_2^2}}, \qquad Y_1 = X_1 \, \frac{U_2}{U_1}$$

są niezależne i mają rozkład normalny $N(0,1)$.

▷ Schemat:

1. Wygenerować: $R_1, R_2 \in \mathcal{U}(0,1)$ i wyliczyć: $U_1 = 2R_1 - 1,\; U_2 = 2R_2 - 1$.
2. Wyliczyć: $W = U_1^2 + U_2^2$.
3. Jeżeli: $W > 1$, to wrócić do kroku 1. ($\longrightarrow$ eliminacja ok. 21% przypadków).
4. Wyznaczyć: $X = U_1\, Z$ oraz $Y = U_2\, Z$, gdzie: $Z = \sqrt{\frac{-2\ln W}{W}}$.

E. Metoda eliminacji względem rozkładu wykładniczego $\longrightarrow$ patrz wykład 6.

F. Metoda kombinacji superpozycji rozkładów i eliminacji $\longrightarrow$ patrz wykład 6.

$\Rrightarrow$ Ćw. N9.2: Wygenerować rozkład normalny metodami odwracania dystrybuanty oraz Marsaglii i Braya.

Rozkład Cauchy'ego (Breita–Wignera) $C(\theta,\lambda)$:

▶ Gęstość prawdopobieństwa:

$$f_{\theta,\lambda}(x) = \frac{\lambda}{\pi}\,\frac{1}{\lambda^2+(x-\theta)^2}\,, \qquad -\infty < x < +\infty\,.$$

$\longrightarrow$ Zamiana zmiennych (transformacja liniowa):

$$x \to x' = \frac{x-\theta}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad C(\theta,\lambda) \to C(0,1): \quad f_{0,1}(x') = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x'^2}.$$

▷ Uwaga: Wartość oczekiwana nie istnieje, a wariancja jest nieskonczona!

A. Metoda odwracania dystrybuanty:

▶ Dystrybuanta:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad X = \mathrm{tg}\left(\pi\left[U-\frac{1}{2}\right]\right), \qquad U \in \mathcal{U}(0,1)$$

Rozkład Cauchy'ego – c.d.

B. **Z uciętego rozkładu Cauchy'ego** (kombinacja metody superpozycji rozkładów i eliminacji):

- ▶ Ucięty rozkład Cauchy'ego $C_u(0,1)$:

$$f_u(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}, & |x| \le 1\,, \\ 0, & |x| > 1\,. \end{cases}$$

LEMAT:

> Jeżeli zmienna losowa X ma ucięty rozkład Cauchy'ego $C_u(0,1)$, to zmienna losowa Y, która z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ jest identyczna ze zmienną losową X oraz z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ jest identyczna ze zmienną losową $1/X$, ma rozkład Cauchy'ego $C(0,1)$.

Dowód: Niech $y \le -1$:

$$\mathcal{P}\{Y \le y\} = \frac{1}{2}\mathcal{P}\{X \le y\} + \frac{1}{2}\mathcal{P}\left\{\frac{1}{X} \le y\right\} = 0 + \frac{1}{2}\mathcal{P}\left\{\frac{1}{y} \le X < 0\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{\pi}\int_{1/y}^{0}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\,y + \frac{1}{2}$$ – dystrybuanta rozkładu Cauchy'ego $C(0,1)$.

Podobnie dowodzimy dla $y \in (-1,1)$ oraz $y \ge 1$. ☒

- ▶ Ucięty rozkład Cauchy'ego generujemy np. metodą eliminacji względem rozkładu $\mathcal{U}(-1,1)$ lub metodą AC z: $g(x) = 0.5,\ f_1(x) = f_u(x) - f_u(0) + 0.5,\ f_2(x) = f_u(0) - 0.5$.

⇛ Ćw. N9.3: Wygenerować rozkład Cauchy'ego powyższymi metodami.

Rozkład potęgowy:

▶ Gęstość prawdopobieństwa:

$$f_1(x) = n\, x^{n-1},$$

$$f_2(x) = n\, (1-x)^{n-1}$$

gdzie: $0 \le x \le 1,\ n \in \mathbb{N}$.

A. Metoda odwracania dystrybuanty:

$$X = U^{1/n} \qquad \to f_1, \qquad U \in \mathcal{U}(0,1).$$

$$Y = 1 - U^{1/n} \quad \to f_2, \qquad U \in \mathcal{U}(0,1).$$

▷ Wada: Czasochłonna operacja $U^{1/n}$.

B. Niech $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}(0,1)$ – niezależne zmienne losowe:

$$X = \max\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \text{ ma rozkład o gęstości } f_1,$$

$$Y = \min\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} \text{ ma rozkład o gęstości } f_2.$$

⇛ Ćw. N9.4: Wygenerować rozkład potęgowy powyższymi metodami dla kilku wartości n.

Rozkłady α-stabilne $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$:

Zmienna losowa X ma rozkład **α-stabilny**, $0 < \alpha \leq 2$, z parametrem skali $\sigma > 0$, z parametrem asymetrii $\beta \in [-1, 1]$ i z parametrem położenia $\mu \in \mathbb{R}$, jeżeli jej funkcja charakterystyczna $\phi(t)$ jest dana wzorem:

$$\ln \phi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \,\mathrm{sign}\, t \,\mathrm{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t, & \alpha \neq 1, \\ -\sigma |t| \left(1 - i\beta \,\mathrm{sign}\, t \,\frac{2}{\pi}\, \ln |t|\right) + i\mu t, & \alpha = 1. \end{cases}$$

▷ Dla $\alpha = 2$ – rozkład normalny.

▷ Dla $\alpha = 1$ – rozkład Cauchy'ego.

▶ W pozostałych przypadkach nie jest znany wzór analityczny dla gęstości prawdopodobieństwa lub dystrybuanty tego rozkładu!

▷ Dla $0 < \alpha < 2$ – rozkład Levy'ego, który ma zachowanie asymptotyczne w postaci tzw. ogonów Pareto: $\sim \sigma^\alpha / |x|^{1+\alpha}$.

¶ **Dygresja:** Rozkład jest stabilny jeżeli suma niezależnych zmiennych losowych z tego rozkładu jest też zmienną losową z tego rozkładu (choć z innymi parametrami).

Rozkłady α-stabilne – c.d.

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład $S_\alpha(1,\beta,0)$, to zmienna losowa Y dana wzorem:

$$Y = \begin{cases} \sigma X + \mu & \alpha \neq 1, \\ \sigma X + \frac{2}{\pi}\beta\sigma\ln\sigma + \mu & \alpha = 1, \end{cases}$$

ma rozkład $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$.

► **Algorytm generowania zmiennej losowej X** (Chambers, Mallows, Stuck, 1976):

1. Wygenerować zmienną losową: $U \in \mathcal{U}(-\pi/2, \pi/2)$.
2. Wygenerować zmienną losową W o rozkładzie wykładniczym $E(0,1)$.

A) Dla $\alpha = 1$ obliczyć:

$$X = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta U\right)\mathrm{tg}U - \beta\ln\frac{\frac{\pi}{2}W\cos U}{\frac{\pi}{2} + \beta U}\right],$$

B) Dla $\alpha \neq 1$ obliczyć:

$$X = S_{\alpha,\beta}\,\frac{\sin(\alpha[U + B_{\alpha,\beta}])}{(\cos U)^{1/\alpha}}\left\{\frac{\cos\left(U - \alpha[U + B_{\alpha,\beta}]\right)}{W}\right\}^{(1-\alpha)/\alpha},$$

gdzie:

$$B_{\alpha,\beta} = \alpha^{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\beta\,\mathrm{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right), \qquad S_{\alpha,\beta} = \left(1 + \beta^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/(2\alpha)}.$$

Rozkład dwumianowy (Bernoulliego) $b(n,p)$:

- Gęstość prawdopobieństwa:

$$\mathcal{P}\{X=m\} = \binom{n}{m} p^m \, (1-p)^{n-m}, \qquad m = 0,1,2,\ldots,n.$$

$\longrightarrow$ Liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p.

- **Algorytm 1:** (typu ,,Igła Buffona")

```
m = 0;
for (i = 0; i < n; i++) {
     U = GenU(0,1);          // tzn. U z rozkladu U(0,1)
     if (U <= p) m++;
}
returm m;
```

▷ Wada: Wymaga wielu liczb losowych.

Rozkład dwumianowy – c.d.

Jeżeli n nie jest bardzo duże, to może opłacać się stablicowanie dystrybuanty, tzn. obliczenie:

$$p_k = \sum_{i=0}^{k} \mathcal{P}\{X = i\}$$

i skorzystanie z następującego algorytmu, który wymaga tylko jednej liczby losowej:

▶ **Algorytm 2:**

```
m = 0;
U = GenU(0,1);          // tzn. U z rozkladu U(0,1)
while (U > p[m]) m++;
return m;
```

Jeżeli n jest duże, ale może być przedstawione w postaci $n = kl$, gdzie l nie jest bardzo duże, to może opłacać się generowanie k liczb losowych o rozkładach dwumianowych $b(l, p)$ za pomocą powyższego algorytmu i obliczenie m jako sumy tak wygenerowanych liczb.

Rozkład dwumianowy – c.d.

LEMAT:

Jeżeli zmienna losowa $U \in \mathcal{U}(0,1)$, to zmienne losowe:

$$Y = \Theta(p - U) \quad \text{oraz} \quad V = \min\left\{\frac{U}{p}, \frac{1-U}{1-p}\right\}$$

są niezależne i $V \in \mathcal{U}(0,1)$.

Dowód: np. Wieczorkowski i Zieliński (1997).

▷ Zmienną losową Y możemy traktować jako wskaźnik pojawienia się sukcesu, a zmienną losową V jako zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{U}(0,1)$ w niezależnym powtórzeniu doświadczenia w schemacie Bernoulliego.

► **Algorytm 3:** (potrzebna tylko jedna liczba losowa!)

```
m = 0;
U = GenU(0,1);          // tzn. U z rozkladu U(0,1)
for (i = 0; i < n; i++)
   if (U <= p) { m++; U /= p; }
   else U = (1 - U)/(1 - p);
return m;
```

⇛ Ćw. N9.5: Zaimplementować generatory rozkładu dwumianowego według powyższych algorytmów.

Rozkład Poissona $P(\lambda)$:

- Gęstość prawdopobieństwa:

$$\mathcal{P}\{X = n\} = \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

A) LEMAT:

Jeżeli $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – niezależne zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym $E(0,1)$, to zmienna losowa:

$$X = \min\left\{ k\colon \sum_{i=0}^{k} \xi_i > \lambda \right\}$$

ma rozkład Poissona $P(\lambda)$.

Dowód: Zdarzenia losowe: $\{X \leq k\}$ oraz $\{\sum_{i=0}^{k} \xi_i > \lambda\}$ są równoważne.
Zmienna losowa $\sum_{i=0}^{k} \xi_i$ ma rozkład $\Gamma(k+1, 1)$, gdzie $\Gamma(\alpha, \theta)$ – rozkład gamma o gęstości:

$$f_{\alpha,\theta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\, \theta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\theta}.$$

Zatem $\mathcal{P}\{X \leq k\} = \int_{\lambda}^{+\infty} f_{k+1,1}(x)dx$ i wystarczy pokazać, że
$\mathcal{P}\{X = k\} = \mathcal{P}\{X \leq k\} - \mathcal{P}\{X \leq k-1\}$ jest równe prawdopodobieństwu Poissona. ⊠

Rozkład Poissona – c.d.

▶ **Algorytm 1:**

```
X = -1; S = 0;
while (S <= lambda) {
     Y = GenE(0,1);          // tzn. Y z rozkladu E(0,1)
     S += Y; X++;
}
return X;
```

⟶ Oczywista odmiana tego algorytmu:

▶ **Algorytm 2:**

```
X = -1; S = 1; q = exp(-lambda);
while (S > q) {
     U = GenU(0,1);          // tzn. U z rozkladu U(0,1)
     S *= U; X++;
}
return X;
```

▷ Wada: Wymagają wielu liczb losowych.

Rozkład Poissona – c.d.

B) **Metoda odwracania dystrybuanty (ogólna):**

▶ **Algorytm 3:**

```
X = 0;
q = exp(-lambda);
S = P = q;
U = GenU(0,1);          // tzn. U z rozkladu U(0,1)
while (U > S) {
     X++;
     P *= lambda/X;
     S += P;
}
return X;
```

▷ Wada: Dla dużych wartości λ kumulacja błędów zaokrągleń przy obliczaniu prawdopodobieństw P może prowadzić do niedokładności numerycznych.

⇒ Ćw. N9.6: Zaimplementować generatory rozkładu Poissona według powyższych algorytmów i wygenerować rozkłady dla kilku wartości λ.

Rozkład geometryczny $G(p)$:

▶ Gęstość prawdopobieństwa:

$$\mathcal{P}\{X = n\} = (1-p)\,p^n\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

LEMAT:

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o gęstości:

$$f_\alpha(x) = \alpha\, e^{-\alpha x},$$

to zmienna losowa $\lfloor X \rfloor$ (tzn. część całkowita X) ma rozkład geometryczny:

$$G(e^{-\alpha}).$$

▶ **Algorytm:**

1. Generujemy zmienną losową: $U \in \mathcal{U}(0,1)$.
2. Obliczamy: $X = \lfloor \ln U / \ln p \rfloor$.

⇒ Ćw. N9.7: Zaimplementować generator rozkładu geometrycznego i wygenerować rozkłady dla kilku wartości p.

Metoda równomiernego rozbicia przedziału $(0,1)$:

- Ogólny rozkład dyskretny:

$$\mathcal{P}\{X = k\} = p_k\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, K.$$

▷ Czasami metoda odwracania dystrybuanty (patrz wykład 6) może być bardzo wolna (duża wartość K)!

- **Bardziej wydajna metoda:**
  - Przedział $(0,1)$ dzielimy na $K+1$ podprzedziałów (binów) $\left(\frac{i-1}{K+1}, \frac{i}{K+1}\right)$ o jednakowej długości i numerujemy je kolejnymi liczbami $1, 2, \ldots, K+1$.
    $\longrightarrow$ Zmienna $U \in \mathcal{U}(0,1)$ wpada do binu o numerze $\lfloor (K+1)U + 1 \rfloor$.
  - Tworzymy ciąg: $q_j = \sum_{k=0}^{j} p_k\,, \quad j = 0, 1, \ldots, K.$
  - Tworzymy pomocniczy ciąg liczb: $g_i = \max\left\{ j : q_j < \frac{i}{K+1} \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, K+1.$
- **Algorytm:**

```
U = GenU(0,1);              // tzn. U z rozkladu U(0,1)
X = g[(int) (K + 1)U + 1] + 1;
while (q[X-1] > U) X--;  // oczekiwana liczba porownan <= 2
return X;
```

Metody ogólne:

Niech $\vec{X}$ – m-wymiarowa zmienna losowa o gęstości prawdopodobieństwa $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

► Do generowania gęstości wielowymiarowej zmiennej losowej można stosować metody eliminacji oraz superpozycji rozkładów.

▷ Mogą się pojawić większe trudności techniczne, np. problem obszaru zmiennej losowej $\vec{X}$!

PRZYKŁAD:

Generowanie rozkładu równomiernego w kuli jednostkowej $K_m(0,1)$ metodą eliminacji względem rozkładu równomiernego na kostce $[-1,1]^m$.

$\longrightarrow$ Prawdopodobieństwo akceptacji: $p_m = \pi^{m/2}/[2^m\Gamma(m/2+1)]$.

m	p_m	$N_m = 1/p_m$
2	$7.854 \cdot 10^{-1}$	1.27
5	$1.645 \cdot 10^{-1}$	6.08
10	$2.490 \cdot 10^{-3}$	$4.015 \cdot 10^{2}$
20	$2.461 \cdot 10^{-8}$	$4.063 \cdot 10^{7}$
50	$1.537 \cdot 10^{-28}$	$6.507 \cdot 10^{28}$

Metody ogólne – c.d.

- Metoda eliminacji względem rozkładu równomiernego na wielowymiarowym hiperprostokącie $\prod_{j=1}^{m}[a_j, b_j]$ jest najbardziej ogólną metodą generowania rozkładu równomiernego na dowolnym obszarze: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

- Niektóre obszary Ω można otrzymać przez nieosobliwe liniowe przekształcenie prostszych obszarów:

  ▷ kula $K_m(0,1) \;\longrightarrow\;$ elipsoidy w $\mathbb{R}^m$;

  ▷ sfera $S_m(0,1) \;\longrightarrow\;$ powierzchnia elipsoidy w $\mathbb{R}^m$;

  ▷ sympleks $\longrightarrow$ niektóre wielościany wypukłe;

  ▷ powierzchnia sympleksu $\longrightarrow$ powierzchnie takich wielościanów.

  Jeżeli $\vec{X} \in \mathcal{U}(\Omega)$ oraz F – nieosobliwe przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^m$, to $F(\vec{X}) \in U(F(\Omega))$.

- Gęstość wielowymiarowego rozkładu możemy przedstawić w postaci iloczynu gęstości rozkładów brzegowych i warunkowych:

$$f(x_1,\ldots,x_m) = f(x_1)f(x_2|x_1)f(x_3|x_1,x_2)\ldots f(x_n|x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).$$

  $\longrightarrow$ Zmienną losową $\vec{X} = (X_1,\ldots,X_m)$ generujemy ,,współrzędna po współrzędnej”, tzn. X_i wg. rozkładu $f(x_i|x_1,x_2,\ldots,x_{i-1})$ po wygenerowaniu: $X_1,\ldots,X_{i-1}$.

- **Rozkład równomierny na sferze $S_m(0,1)$:**

$$S_m(0,1) = \left\{ (x_1,\ldots,x_m) \colon \sum_{j=1}^{m} x_j^2 = 1 \right\}.$$

▶ **Algorytm:**

1) Generuj zmienne losowe $Z_1,\ldots,Z_m$ o rozkładzie normalnym $N(0,1)$.
2) Oblicz: $X_j = Z_j / \sqrt{\sum_{i=1}^{m} Z_i^2}$, $j = 1,2,\ldots,m$.
3) Return $X = (X_1,\ldots,X_m)$.

- **Rozkład równomierny na kuli $K_m(0,1)$:**

$$K_m(0,1) = \left\{ (y_1,\ldots,y_m) \colon \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \le 1 \right\}.$$

Jeżeli zmienna losowa Y ma rozkład równomierny na kuli $K_m(0,1)$, to długość promienia wodzącego punktu Y jest zmienną losową o rozkładzie potęgowym z gęstością:

$$h(r) = m r^{m-1}, \quad 0 \le r \le 1.$$

▶ **Algorytm:**

1) Generuj zmienną losową X o rozkładzie równomiernym na sferze $S_m(0,1)$.
2) Generuj R według rozkładu o dystrybuancie $H(r) = r^m$, $0 \le r \le 1$.
3) Return $Y = (RX_1,\ldots,RX_m)$.

- **Rozkład równomierny na sympleksie W_m** $\longrightarrow$ LEMAT:

Jeżeli $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{U}(0,1)$ oraz $U_{1:m}, \ldots, U_{m:m}$ jest ciągiem odpowiednich statystyk pozycyjnych, to zmienna losowa $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ dana wzorami:

$$X_1 = U_{1:m}, \quad X_2 = U_{2:m} - U_{1:m}, \quad \ldots, \quad X_m = U_{m:m} - U_{m-1:m}$$

ma rozkład równomierny na sympleksie:

$$W_m = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \colon \sum_{j=1}^{m} x_j \leq 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

- **Rozkład równomierny na powierzchni sympleksu V_m** $\longrightarrow$ LEMAT:

Jeżeli $U_1, \ldots, U_{m-1} \in \mathcal{U}(0,1)$ oraz $U_{1:m-1}, \ldots, U_{m-1:m-1}$ jest ciągiem odpowiednich statystyk pozycyjnych, to zmienna losowa $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ dana wzorami:

$$X_1 = U_{1:m-1}, \quad \ldots, \quad X_{m-1} = U_{m-1:m-1} - U_{m-2:m-1}, \quad X_m = 1 - U_{m-1:m-1}$$

ma rozkład równomierny na powierzchni sympleksu:

$$V_m = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \colon \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

$\Rrightarrow$ Ćw. N9.8: Zaimplementować generatory dla rozkładów na sferze, kuli, sympleksie i jego powierzchni.