

Komputerowa analiza zagadnień różniczkowych

8. Metody wielokrokowe

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

2013

Liniowe metody wielokrokowe

Często przywoływaną wadą metod Rungego-Kutty jest konieczność obliczania prawej strony równania w punktach pośrednich, w których rozwiązania “nie potrzebujemy”. Zamiast tego, do uwzględnienia zmienności prawej strony na przestrzeni kroku całkowania, można wykorzystać informację zgromadzoną w *poprzednich* punktach. Metody takie noszą nazwę *liniowych metod wielokrokowych*.

Ogólna metoda wielokrokowa ma postać

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n-j} - h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}_{n-j} = 0, \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{f}_s \equiv \mathbf{f}(x_s, \mathbf{y}_s)$. h jest krokiem całkowania, o którym w tym momencie zakładamy, że jest stały. (1) zawiera *kombinacje liniowe* poprzednio wyliczonych wartości funkcji i prawych stron równania, co uzasadnia człon “liniowe” w nazwie. Jeżeli $\beta_0 \neq 0$, metoda jest niejawna.

Metody Adamsa — ogólne sformułowanie

Rozważamy problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

Rozwiązanie ma postać

$$y(x_{n+1}) = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (3)$$

Klasyczne metody Adamsa polegają na zastąpieniu $f(x, y(x))$ w (3) przez *wzór ekstrapolacyjny* (Bashforth) lub *interpolacyjny* (Moulton) z węzłami

interpolacji odległymi o krok całkowania, h , i scałkowaniu tego wzoru. Celem takiego postępowania, podobnie jak w metodach Rungego-Kutty, jest uwzględnienie zmienności pochodnej w obrębie kroku całkowania. Zauważmy, że **wynik całkowania wielomianu interpolacyjnego nie zależy od wartości funkcji** — wartości $f(x_l, y_l)$ wchodzą jako „ustalone” wartości interpolowanej funkcji w węzłach.

k-krokowe metody Adamsa:

$$\text{Adams-Bashforth: } y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbf{f}_{n+1-j} + O(h^{k+1}), \quad (4)$$

$$\text{Adams-Moulton: } y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\beta}_j \mathbf{f}_{n+1-j} + O(h^{k+1}). \quad (5)$$

Przykład - wyprowadzenie trzykrokowej metody Adamsa-Bashfortha

Funkcję podcałkową w (3) przybliżam poprzez ekstrapolację wielomianową z trzech ostatnio obliczonych punktów, odległych od siebie o h :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) &\simeq \mathbf{f}_{\text{extr}}(x) = \frac{(x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_n)} \mathbf{f}_{n-2} \\ &+ \frac{(x - x_{n-2})(x - x_n)}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)} \mathbf{f}_{n-1} + \frac{(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})}{(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} \mathbf{f}_n \\ &= \frac{1}{2h^2}(x - x_n + h)(x - x_n) \mathbf{f}_{n-2} - \frac{1}{h^2}(x - x_n + 2h)(x - x_n) \mathbf{f}_{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{2h^2}(x - x_n + 2h)(x - x_n + h) \mathbf{f}_n. \end{aligned} \tag{6}$$

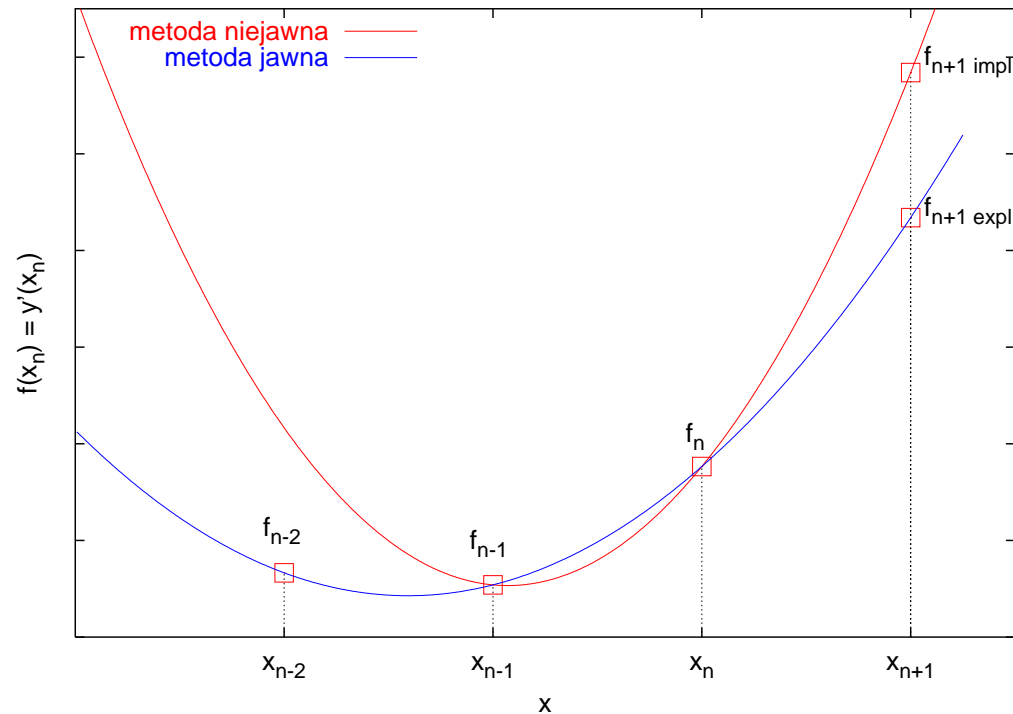
Następnie

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) dx &\simeq \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathbf{f}_{\text{extr}}(x) dx = \frac{1}{2h^2} \mathbf{f}_{n-2} \int_0^h (z+h)z dz \\ &- \frac{1}{h^2} \mathbf{f}_{n-1} \int_0^h (z+2h)z dz + \frac{1}{2h^2} \mathbf{f}_n \int_0^h (z+2h)(z+h) dz \\ &= \frac{1}{2h^2} \cdot \frac{5}{6} h^3 \mathbf{f}_{n-2} - \frac{1}{h^2} \cdot \frac{4}{3} h^3 \mathbf{f}_{n-1} + \frac{1}{2h^2} \cdot \frac{23}{6} h^3 \mathbf{f}_n \\ &= \frac{h}{12} (23\mathbf{f}_n - 16\mathbf{f}_{n-1} + 5\mathbf{f}_{n-2}). \end{aligned} \quad (7)$$

Proszę to porównać z wyrażeniem (8c) poniżej.

Idea konstrukcji metod Adamsa:

rysunek nie jest wierny, jako że pochodnej w punkcie x_{n+1} *nie* oblicza się za pomocą prostej interpolacji/ekstrapolacji



Metody Adamsa-Bashfortha (jawne)

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + O(h^2) \quad (8a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (3f_n - f_{n-1}) + O(h^3) \quad (8b)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) + O(h^4) \quad (8c)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) + O(h^5) \quad (8d)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} (1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}) + O(h^6) \quad (8e)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1440} (4277f_n - 7923f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 7298f_{n-3} + 2877f_{n-4} - 475f_{n-5}) + O(h^7) \quad (8f)$$

Metody Adamsa-Moultona (niejawne)

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} + O(h^2) \quad (9a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_{n+1} + f_n) + O(h^3) \quad (9b)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}) + O(h^4) \quad (9c)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) + O(h^5) \quad (9d)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} (251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) + O(h^6) \quad (9e)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1440} (475f_{n+1} + 1427f_n - 798f_{n-1} + 482f_{n-2} - 173f_{n-3} + 27f_{n-4}) + O(h^7) \quad (9f)$$

Podane wyżej metody są *wszystkimi sensownymi* metodami wielokrokowymi o stałym kroku, opartymi o interpolację/ekstrapolację wielomianową.

Zgodność metod Adamsa jest oczywista.

Stabilność metod wielokrokowych

Stabilność metod wielokrokowych bada się nieco inaczej niż stabilność metod jednokrokowych typu metod Rungego-Kutty. Dla przykładu pokażemy jak badać stabilność k -krokowej jawnej metody Adamsa-Bashfortha; stabilność niejawnych metod Adamsa-Moultona bada się zupełnie podobnie.

Rozważmy równanie (4), w którym wszystkie y_l zostały zaburzone: $y_l \rightarrow y_l + \varepsilon_l$. Mamy

$$\begin{aligned} y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} &= y_n + \varepsilon_n + h \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbf{f}(x_{n+1-j}, y_{n+1-j} + \varepsilon_{n+1-j}) \\ &\simeq y_n + \varepsilon_n + h \sum_{j=1}^k \beta_j \left(\mathbf{f}_{n+1-j} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{n+1-j} \varepsilon_{n+1-j} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Wszystkie k jacobiany w równaniu (10) oblicza się w *różnych* punktach. Jeśli jednak krok h jest mały, możemy przyjąć, że w przybliżeniu są one sobie równe, podobnie jak to robiliśmy przy analizie stabilności metod Rungego-Kutty. (Założenie to nie jest spełnione w miejscach, w których funkcja zmienia się bardzo gwałtownie.) Wobec czego przechodzimy do reprezentacji, w której jacobian jest diagonalny — zastępujemy jacobian $\partial f / \partial y$ jego wartością własną λ , natomiast błędy ε_l zastępujemy odpowiednią składową ε_l . Formalnie rzecz biorąc, analizę taką trzeba powtórzyć dla wszystkich λ i odpowiadających im składowych błędów, okaże się jednak, że nie jest to konieczne.

Z równania (10) otrzymujemy zatem

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h\lambda\beta_1\varepsilon_n + h\lambda\beta_2\varepsilon_{n-1} + \cdots + h\lambda\beta_k\varepsilon_{n+1-k}. \quad (11)$$

Macierz wzmocnienia

Oznaczmy $h\lambda = z$. Równanie (11) możemy przepisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n+2-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\beta_1 z & \beta_2 z & \beta_3 z & \dots & \beta_{k-1} z & \beta_k z \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_{n-2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n+1-k} \end{bmatrix} \quad (12a)$$

czyli

$$\vec{\varepsilon}_{n+1} = \mathbf{G}\vec{\varepsilon}_n \quad (12b)$$

Zwracam uwagę, że ε_n z równania (10) i $\vec{\varepsilon}_n$ z równania (12b) to są **zupełnie różne wektory**. Badanie stabilności metody (4) sprowadza się teraz do znalezienia wartości własnych macierzy wzmocnienia \mathbf{G} .

Wartości własne macierzy wzmocnienia

Oznaczmy $W_k = \det(\mathbf{G} - g\mathbf{I})$. Rozwijając względem ostatniej kolumny (patrz (12a)) otrzymujemy

$$W_k = -gW_{k-1} + (-1)^{k+1}\beta_k z \det \begin{bmatrix} 1 & -g & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -g & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Wyznacznik macierzy wypisanej jawnie w równaniu (13) wynosi 1. Postępowanie to łatwo iterować. Ostatecznie otrzymujemy następujące równanie charakterystyczne dla macierzy wzmocnienia (uwaga: zmienną jest g):

$$g^k - (1 + z\beta_1)g^{k-1} - z\beta_2g^{k-2} - \dots - z\beta_{k-1}g - z\beta_k = 0. \quad (14)$$

Metoda Adamsa-Bashfortha rzędu k jest stabilna jeśli wszystkie pierwiastki równania (14) *leżą wewnątrz okręgu jednostkowego*. Ogół takich z , dla których pierwiastki (14) leżą wewnątrz okręgu jednostkowego, nazywam *obszarem stabilności metody*. Zauważmy, że analizując obszar stabilności, uwalniamy się niejako od równania różniczkowego, obecnego tu formalnie tylko poprzez wartości własne jacobianu, a skupiamy się na samej metodzie, podobnie jak to było dla metod Rungego-Kutty.

Wyprowadzenie równań opisujących stabilność niejawnych metod Adamsa-Moultona i BDF, omawianych poniżej, przebiega w sposób analogiczny.

- Obszar stabilności metod Adamsa-Bashfortha maleje wraz ze wzrostem rzędu metody.
- Dwie pierwsze metody Adamsa-Moultona są A-stabilne, obszary stabilności pozostałych maleją wraz ze wzrostem rzędu metody.
- **Żadna metoda wielokrokowa oparta o interpolację/ekstrapolację wielomianową z $k > 6$ nie jest stabilna!**
- Można konstruować stabilne metody wielokrokowe wyższych rzędów, ale dla nich nie obowiązuje już paradygmat ekstrapolowania pochodnej na podstawie zachowania w poprzednich węzłach — nie są to więc metody Adamsa.

Metody predyktor-korektor (*predictor-corrector*)

Jeśli problem *nie jest sztywny*, bardzo często pewną jawną metodę Adamsa-Bashfortha (8) stosuje się jednocześnie z niejawną metodą Adamsa-Moultona (9) *o tym samym rzędzie*. Za pomocą metody jawnej *przewiduje się* rozwiązanie, które potem *poprawia się* za pomocą metody niejawnej. Można to dalej powtarzać, poprawiając poprawione*. Uzyskana metoda jest oczywiście jawna — *unika się rozwiązywania układu równań algebraicznych, na ogół nieliniowych*.

Metody predyktor-korektor są bardzo popularne[†] — w praktycznych zastosowaniach metody Adamsa występują prawie wyłącznie w tym zestawieniu.

*Vide *grabit' nagrabljennoje*.

†Ale ja ich nie lubię ☺

Przykład:

$$\text{predyktor: } \tilde{\mathbf{y}}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h (3\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n-1}), \quad (15a)$$

$$\text{korektor: } \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h (\mathbf{f}(x_{n+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{n+1}) + \mathbf{f}_n), \quad (15b)$$

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}). \quad (15c)$$

Niekiedy krok korektora powtarza się (iteruje) w celu uzyskania **samo-uzgodnionego** (*self-consistent*) rozwiązania nieliniowego równania algebraicznego. Na ogół jednak dokonuje się tylko jednego lub dwóch kroków korektora.

Zmiana kroku w metodach Adamsa

Metody wielokrokowe są oparte o ekstrapolację/interpolację o ustalonych węzłach. Zmiana kroku jest możliwa, ale *kłopotliwa* — do **każdego** przypadku trzeba **wyprowadzać** odpowiedni wzór.

Przykład: Wyprowadźmy wzór postaci

$$y_{n+1} = y_n + h_n A_n f(x_n, y_n) + h_n B_n f(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (16)$$

gdzie $x_n - x_{n-1} = h_{n-1}$, $x_{n+1} - x_n = h_n \neq h_{n-1}$.

Zachodzi

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \quad (17)$$

Funkcję podcałkową przybliżam jako

$$f(x, y(x)) \simeq \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} f_n + \frac{x_n - x}{x_n - x_{n-1}} f_{n-1} \quad (18)$$

Po wykonaniu całkowania dostaję

$$\begin{aligned}
\int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) dx &\simeq \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_n - x_{n-1}} - \frac{x_{n-1}(x_{n+1} - x_n)}{x_n - x_{n-1}} \right) \mathbf{f}_n + \\
&\left(\frac{x_n(x_{n+1} - x_n)}{x_n - x_{n-1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_n - x_{n-1}} \right) \mathbf{f}_{n-1} = \\
&(x_{n+1} - x_n) \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2} + x_n - x_{n-1} \right) \frac{\mathbf{f}_n}{x_n - x_{n-1}} - \\
&(x_{n+1} - x_n) \frac{x_{n+1} - x_n}{2} \cdot \frac{\mathbf{f}_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \quad (19)
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h_n \left[\left(1 + \frac{h_n}{2h_{n-1}} \right) \mathbf{f}_n - \frac{h_n}{2h_{n-1}} \mathbf{f}_{n-1} \right]. \quad (20)$$

Metody BDF

Metody Adamsa oparte są na interpolacji/ekstrapolacji pochodnej. Czy można zbudować metody oparte na ekstrapolacji poprzednich wartości poszukiwanej funkcji?

Tak — są to tak zwane metody **BDF** (*Backward Differentiation Formula*).

Punktem wyjścia jest znany wzór na interpolację Lagrange'a:

$$y(x) \simeq \sum_{j=0}^{p-1} l_j(x) y_j \quad (21)$$

gdzie $y_j = y(x_j)$. **Węzłami interpolacji są punkty** $x_{n+1-p}, \dots, x_n, x_{n+1}$.
“Przyszły” punkt jest węzłem interpolacji! Różniczkujemy wzór (21), otrzymując przybliżony wzór na pochodną:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{j=0}^{p-1} l'_j(x) y_j \quad (22)$$

po czym obliczamy go w punkcie $x = x_{n+1}$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{n+1}} = \sum_{j=0}^{p-1} l'_j(x) \Big|_{x_{n+1}} y_j. \quad (23)$$

Na mocy równania (2), lewa strona równania (23) jest równa $f(x_{n+1}, y_{n+1})$. Otrzymujemy zatem metodę **niejawną**! Ostatecznie, po uporządkowaniu wyrazów, dostajemy metodę postaci

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p-2} \alpha_{p-2,j} y_{n-j} + h\beta_{p-2} f(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (24)$$

Jest ona oparta o interpolację p -punktową i używa bieżącej oraz $p-2$ poprzednich wartości poszukiwanej funkcji. Jest to metoda niejawna, rzędu $p-1$. Współczynniki α, β obliczamy w podany wyżej sposób. Charakterystyczną cechą metod BDF jest to, że pochodna jest obliczana tylko raz, w prawym krańcu przedziału, pojawia się natomiast pewien wielomian interpolacyjny w poszukiwanych wartościach y .

Przykład: Metoda oparta o interpolację na dwu punktach

Przeprowadźmy wielomian interpolacyjny funkcji y przez punkty x_n, x_{n+1} .

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}y_n + \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}y_{n+1} \\ &= -\frac{1}{h}(x - x_{n+1})y_n + \frac{1}{h}(x - x_n)y_{n+1}.\end{aligned}\quad (25)$$

Różniczkując (25) otrzymujemy

$$y'(x) = -\frac{1}{h}y_n + \frac{1}{h}y_{n+1}.\quad (26)$$

Lewą stroną równania (26) wyliczamy w punkcie x_{n+1} . Korzystając z równania (2) i porządkując wyrazy, odtwarzamy niejawną metodę Eulera.

Przykład: Metoda oparta o interpolację na trzech punktach

Przeprowadźmy wielomian interpolacyjny funkcji y przez punkty x_{n-1}, x_n, x_{n+1} .

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{(x - x_n)(x - x_{n+1})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n+1})} y_{n-1} \\ &+ \frac{(x - x_{n-1})(x - x_{n+1})}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n+1})} y_n \\ &+ \frac{(x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n)} y_{n+1} \end{aligned} \quad (27)$$

Jeżeli krok całkowania jest stały, (27) upraszcza się do

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n+1})y_{n-1} - \frac{1}{h^2}(x - x_{n-1})(x - x_{n+1})y_n \\ &+ \frac{1}{2h^2}(x - x_{n-1})(x - x_n)y_{n+1} \end{aligned} \quad (28)$$

Różniczkuję (28):

$$y'(x) = \frac{1}{2h^2} \left[(x - x_{n+1})y_{n-1} + (x - x_n)y_{n-1} - 2(x - x_{n+1})y_n - 2(x - x_{n-1})y_n + (x - x_n)y_{n+1} + (x - x_{n-1})y_{n-1} \right]. \quad (29)$$

Wyliczam (29) w punkcie x_{n+1} :

$$y'(x_{n+1}) = \frac{1}{2h^2} \left[hy_{n-1} - 2 \cdot 2hy_n + hy_{n+1} + 2hy_{n+1} \right]. \quad (30)$$

Po skorzystaniu z równania (2) i uporządkowaniu wyrazów, otrzymuję

$$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}hf(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (31)$$

Wszystkie sensowne metody BDF

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} + O(h^2) \quad (32a)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{3} (4y_n - y_{n-1}) + \frac{2}{3} hf_{n+1} + O(h^3) \quad (32b)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{11} (18y_n - 9y_{n-1} + 2y_{n-2}) + \frac{6}{11} hf_{n+1} + O(h^4) \quad (32c)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{25} (48y_n - 36y_{n-1} + 16y_{n-2} - 3y_{n-3}) + \frac{12}{25} hf_{n+1} + O(h^5) \quad (32d)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{137} (300y_n - 300y_{n-1} + 200y_{n-2} - 75y_{n-3} + 12y_{n-4}) + \frac{60}{137} hf_{n+1} + O(h^6) \quad (32e)$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{147} (360y_n - 450y_{n-1} + 400y_{n-2} - 225y_{n-3} + 72y_{n-4} - 10y_{n-5}) + \frac{60}{147} hf_{n+1} + O(h^7) \quad (32f)$$

Zgodność metod BDF też, po prostych rachunkach, okazuje się być oczywista ☺. Dla przykładu, dla drugiej z metod BDF otrzymujemy

$$3\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = 2f_{n+1}. \quad (33)$$

Metody BDF do rzędu szóstego są stabilne *poza* pewnym obszarem ograniczonym, który rośnie wraz ze wzrostem rzędu metody. Przewaga metod BDF nad metodami Adamsa-Moultona polega na lepszej stabilności BDF. Jeśli układ nie jest zbyt sztywny, preferowane są jednak metody Adamsa-Moultona, gdyż te metody dają mniejszy błąd, niż metody BDF tego samego rzędu.

Stabilność metod BDF

Aby zbadać stabilność metod BDF, rozważamy zaburzone równanie (24):

$$\begin{aligned} y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} &= \sum_{j=0}^{p-2} \alpha_j (y_{n-j} + \varepsilon_{n-j}) + h\beta f(x_{n+1}, y_{n+1} + \varepsilon_{n+1}) \\ &\simeq \sum_{j=0}^{p-2} \alpha_j y_{n-j} + h\beta f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ &+ \sum_{j=0}^{p-2} \alpha_j \varepsilon_{n-j} + h\beta \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_{n+1}, y_{n+1}} \varepsilon_{n+1} \end{aligned} \quad (34)$$

Teraz przechodzimy do reprezentacji diagonalnej jacobianu. Niech λ będzie jego wartością własną. Oznaczam $z = h\lambda$ i otrzymuję

$$(1 - \beta z)\varepsilon_{n+1} = \sum_{j=0}^{p-2} \alpha_j \varepsilon_{n-j} \quad (35)$$

Podobnie jak poprzednio, zapisuję równanie (35) w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-p+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0}{1-\beta z} & \frac{\alpha_1}{1-\beta z} & \frac{\alpha_2}{1-\beta z} & \cdots & \frac{\alpha_{p-2}}{1-\beta z} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_{n-2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-p+2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Metoda jest stabilna, jeśli wszystkie wartości własne macierzy w równaniu (36) są na moduł mniejsze od jeden, czyli gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego leżą wewnątrz okręgu jednostkowego. Zbiór takich $z \in \mathbb{C}$, dla których jest to spełnione, nazywam **obszarem stabilności** odpowiedniej metody BDF. Musimy rozważać obszary zespolone, gdyż wartości własne jacobianu mogą być zespolone.

Zmiana kroku w metodach BDF

... jest kłopotliwa, podobnie jak w przypadku metod Adamsa. Należy rozważać wielomiany interpolacyjne postaci (27) (i wyższych rzędów!), w których nie zakładamy, że kolejne węzły są równoodległe. Postępując jak poprzednio, otrzymujemy zwarte wzory — mniej eleganckie, niż wzory (32) zakładające stały krok, tym niemniej użyteczne.

Zalety metod wielokrokowych

- ☺ Konceptyjna prostota, łatwość zaimplementowania.
- ☺ Szybkość (zwłaszcza dla metod jawnych).
- ☺ Uzyskanie wysokiego rzędu jest obliczeniowo tanie.
- ☺ Popularność, bardzo duża ilość gotowych kodów.

Wady metod wielokrokowych

- ☹ Wymagają inicjalizacji.
- ☹ Metody Adamsa (ale nie BDF!) mają kiepskie własności stabilności.
- ☹ Kłopotliwa zmiana kroku.