

Dalsze kwestie rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych metodami błędzenia przypadkowego

- **Oczekiwany czas błędzenia w zagadnieniu Dirichleta dla równania Laplace'a.**
- **Metody rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych przez sprowadzanie ich do układów równań liniowych.**
- **Metoda błędzenia przypadkowego ze zmienną długością kroku.**
- **Drugie i trzecie zagadnienie brzegowe dla równania Laplace'a.**

Zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a

Znaleźć wartości funkcji $u(x_1, x_2, \dots, x_k)$ spełniającej równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0, \quad (x_1, x_2, \dots, x_k) \in D \subset \mathbb{R}^k, \quad (1)$$

wewnątrz obszaru D , jeżeli na brzegu $\Gamma(D)$ tego obszaru przyjmuje ona wartości dane funkcją f :

$$u(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \Gamma(D). \quad (2)$$

► Niech obszar D będzie wyznaczony przez układ nierówności:

$$0 \leq \sum_{i=1}^k x_i^2 \leq r^2, \quad r = \text{const.}$$

▷ Oznaczmy: $\pi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – prawdopodobieństwo, że cząsteczka X startując z punktu (x_1, x_2, \dots, x_k) dojdzie do brzegu obszaru w ν krokach;

$\kappa(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – oczekiwana liczba kroków w takiej trajektorii.

$$\pi_0(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \Gamma(D), \\ 0, & (x_1, x_2, \dots, x_k) \in D \end{cases}$$

$$\pi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{2k} \sum' \pi_{\nu-1}(x'_1, x'_2, \dots, x'_k),$$

gdzie \sum' oznacza sumowanie po wszystkich punktach sąsiednich punktu (x_1, x_2, \dots, x_k) .

Na podstawie ostatniego wzoru, dla oczekiwanej liczby kroków:

$$\kappa(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \pi_{\nu}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

dostajemy:

$$\begin{aligned} \kappa(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \frac{1}{2k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\nu \sum' \pi_{\nu-1}(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \right] \\ &= \frac{1}{2k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[(\nu - 1) \sum' \pi_{\nu-1}(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \right] + \frac{1}{2k} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum' \pi_{\nu-1}(x'_1, x'_2, \dots, x'_k). \end{aligned}$$

▷ Skąd otrzymujemy:

$$\kappa(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{2k} \sum' \kappa(x'_1, x'_2, \dots, x'_k) + 1.$$

► Powyższe równanie jest różnicowym odpowiednikiem **równania różniczkowego Poissona**:

$$\frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_k^2} = -2k, \quad (x_1, x_2, \dots, x_k) \in D,$$

z warunkami brzegowymi:

$$\kappa(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, \quad (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \Gamma(D).$$

Podstawiając w poprzednim równaniu:

$$\kappa(x_1, x_2, \dots, x_k) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_k) - \sum_{i=1}^k x_i^2$$

otrzymujemy dla funkcji ψ równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} = 0.$$

▷ Ponieważ na brzegu obszaru $\Gamma(D)$:

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_k) = r^2 = \text{const},$$

to również dla wszystkich punktów obszaru D :

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_k) = r^2.$$

► Skąd wynika oszacowanie na oczekiwaną liczbę kroków (czas błędzenia przypadkowego):

$$\kappa(x_1, x_2, \dots, x_k) = r^2 - \sum_{i=1}^k x_i^2 \leq r^2.$$

Wniosek:

Oczekiwana liczba kroków (oczekiwany czas błędzenia przypadkowego) cząsteczki X od punktu (x_1, x_2, \dots, x_k) do brzegu obszaru może być oszacowana przez liczbę r (liniowy rozmiar obszaru) niezależnie od liczby wymiarów k (liczby zmiennych w równaniu).

Zagadnienie Dirichleta w postaci dyskretnej w dwóch wymiarach:

$$u(x, y) = \frac{1}{4} [u(x-1, y) + u(x+1, y) + u(x, y-1) + u(x, y+1)], \quad (x, y) \in D, \quad (3)$$

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma(D), \quad (4)$$

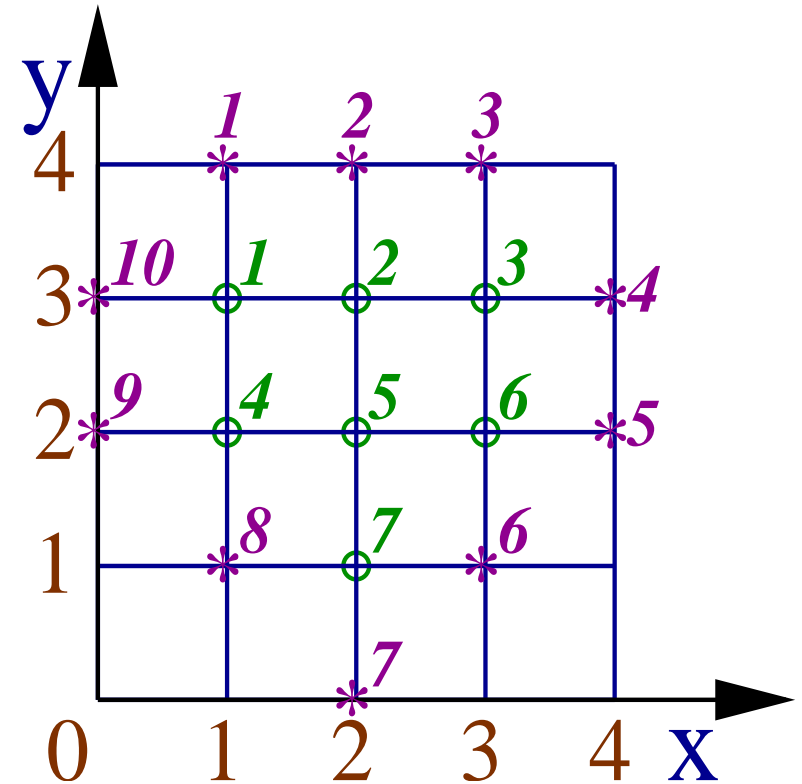
- ▷ Numerując w dowolnym porządku wszystkie punkty $(x, y) \in D \cup \Gamma(D)$, powyższe równania możemy przestawić w postaci **układu równań liniowych**:

$$u_i = a_i + \sum_{j=1}^n h_{ij} u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- **Zatem do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych (typu zagadnienia Dirichleta) możemy stosować metody rozwiązywania układów równań liniowych (np. metody von Neumanna–Ulama, metody Wasowa itd.).**

Zagadnienie Dirichleta jako układ równań liniowych – przykład 6

- Schemat różnicowy pewnego zagadnienia Dirichleta przedstawia rysunek obok: punkty wewnętrzne obszaru oznaczone są **kółkami**, a punkty brzegowe – **gwiazdkami**.
- Punkty wewnętrzne P_i oraz punkty brzegowe Q_i numerujemy niezależnie.
- Niech: u_i – wartość funkcji w punkcie wewnętrznym,
 f_i – wartość funkcji w punkcie brzegowym.
- Dla każdego punktu wewnętrznego P_i piszemy równanie Laplace'a w postaci (3):



$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_1 \quad - u_2/4 \quad \quad \quad - u_4/4 \quad \quad \quad \quad \quad = (f_1 + f_{10})/4 \\
 -u_1/4 \quad + u_2 \quad - u_3/4 \quad \quad \quad - u_5/4 \quad \quad \quad = f_2/4 \\
 \quad \quad - u_2/4 \quad \quad \quad + u_3 \quad \quad \quad - u_6/4 \quad \quad \quad = (f_3 + f_4)/4 \\
 - u_1/4 \quad \quad \quad + u_4 \quad - u_5/4 \quad \quad \quad = (f_8 + f_9)/4 \\
 \quad \quad - u_2/4 \quad \quad - u_4/4 \quad + u_5 \quad - u_6/4 \quad - u_7/4 \quad = 0 \\
 \quad \quad \quad \quad - u_3/4 \quad \quad \quad - u_5/4 \quad + u_6 \quad \quad \quad = (f_5 + f_6)/4 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - u_5/4 \quad \quad \quad + u_7 \quad \quad \quad = (f_6 + f_7 + f_8)/4
 \end{array} \right.$$

Zagadnienie Dirichleta jako układ równań liniowych – przykład 7

Powyższy układ równań można przekształcić do postaci iteracyjnej:

$$\vec{u} = \vec{a} + \mathbf{H} \vec{u},$$

gdzie $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_7)$ jest wektorem wartości funkcji w punktach wewnętrznych obszaru D , \vec{a} jest kolumną wyrazów wolnych (kombinacje liniowe wartości funkcji na brzegu obszaru), natomiast

\mathbf{H} jest macierzą:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Do znalezienia rozwiązania $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_7)$, tzn. obliczenia wartości funkcji u w punktach wewnętrznych obszaru D , można zastosować metody rozwiązywania układów równań liniowych opartych o błądzenie przypadkowe: von Neumanna–Ulama, Wasowa itd.
- ▷ Dzięki specyficznym własnościom macierzy \mathbf{H} dla zagadnienia Dirichleta, takim jak jednakowe prawdopodobieństwa przejść do punktów sąsiednich, powyższe metody rozwiązywania układów równań liniowych można w tym przypadku nieco uprościć.

Metoda podstawowa von Neumanna–Ulama:

1. Cząsteczkę X umieszczamy w punkcie (x, y) .
 2. Obserwujemy błędzenie przypadkowe tej cząsteczki (przejścia do sąsiednich punktów z równymi prawdopodobieństwami) do chwili, w której osiągnie ona brzeg obszaru.
Niech P_k oznacza ostatni punkt obserwowanej trajektorii należący do **wnętrza** obszaru.
 3. Zaobserwowanej trajektorii przypisujemy wartość v równą średniej arytmetycznej wartości funkcji u na wszystkich **punktach brzegowych** sąsiadujących z punktem P_k .
- ▶ Kroki 1–3 powtarzamy n razy.
 - ▶ Za oszacowanie wartości funkcji w punkcie (x, y) przyjmujemy średnią arytmetyczną wartości v dla wszystkich zaobserwowanych trajektorii.
 - ▷ Przykładowe rozwiązanie w punkcie $(2, 2)$ dla 20 trajektorii:

$$u(2, 2) = 1.0500 \pm 0.2756 .$$

⇒ **Ćw. N12.1:** Używając metody podstawowej von Neumanna–Ulama dla układów równań liniowych rozwiązać powyższe zagadnienie Dirichleta dla przykładowych wartości funkcji w punktach brzegowych obszaru D .

Metoda dualna Wasowa:

1. Losujemy punkt brzegowy Q według pewnego (dowolnego) rozkładu prawdopodobieństwa $p(Q)$ i umieszczamy w nim cząsteczkę X .
2. Z jednakowym prawdopodobieństwem losujemy przejście cząsteczki z punktu Q do jednego z **sąsiednich** punktów **wewnętrznych**.
3. Z jednakowymi prawdopodobieństwami losujemy przejścia cząsteczki do kolejnych punktów i obserwujemy jej trajektorię do momentu osiągnięcia przez nią brzegu w pewnym punkcie Q' .
4. Zliczamy liczbę $N(x_1, x_2, \dots, x_k)$ przejść cząsteczki X przez określony punkt wewnętrzny (x_1, x_2, \dots, x_k) .
5. Dla każdego punktu wewnętrznego (x_1, x_2, \dots, x_k) obliczamy wartość:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{2k} N(x_1, x_2, \dots, x_k) \frac{f(Q)}{p(Q)}.$$

► Kroki 1–4 powtarzamy n razy.

► Za oszacowanie wartości funkcji we wszystkich punktach obszaru D przyjmujemy średnie arytmetyczne powyższych wartości w w tych punktach.

⇒ **Ćw. N4***: Do przykładu z poprzedniego ćwiczenia zastosować metodę dualną Wasowa z równomiernym rozkładem prawdopodobieństwa $p(Q)$. Porównać zbieżność tej metody z metodą poprzednią.

Niech: $u(x, y)$ – funkcja harmoniczna (spełnia równanie Laplace'a) dwóch zmiennych;

$S_r(x, y)$ – okrąg o promieniu r i środku w punkcie (x, y) .

⇒ Wartość funkcji u w punkcie (x, y) jest średnią wartości tej funkcji na okręgu $S_r(x, y)$:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r \cos \phi, y + r \sin \phi) d\phi.$$

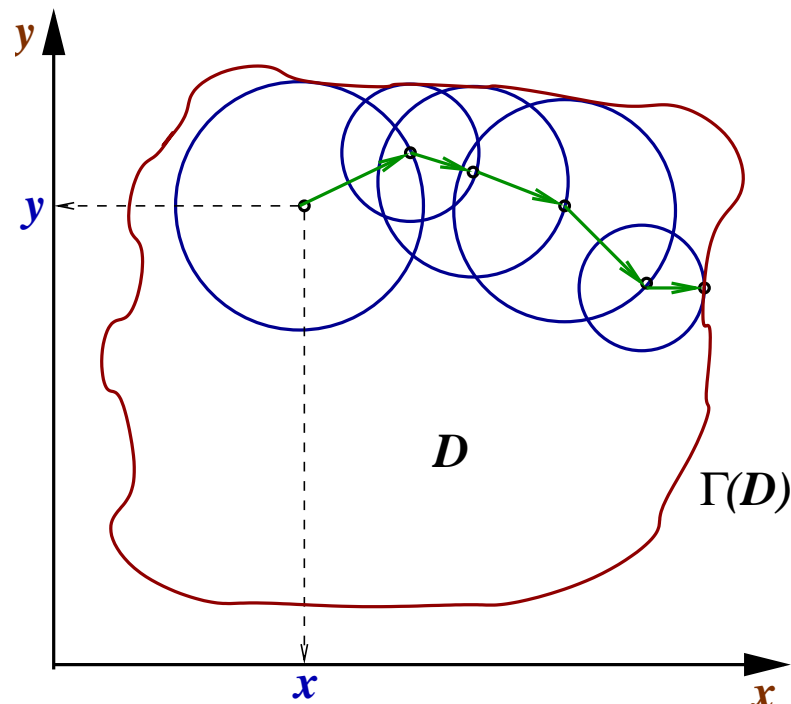
▷ Jest to prawdziwe dla funkcji harmonicznych dowolnej liczby zmiennych: x_1, x_2, \dots, x_k .

Metoda M. E. Mullera:

1. W chwili początkowej cząsteczka X znajduje się w punkcie (x_1, x_2, \dots, x_k) .
 2. Konstruujemy k -wymiarową sferę o środku w punkcie, w którym aktualnie znajduje się cząsteczka, całkowicie zawartą w obszarze D i losujemy punkt $(x'_1, x'_2, \dots, x'_k)$ według rozkładu równomiernego na skonstruowanej sferze. Punkt ten traktujemy jako nowe położenie cząsteczki X .
 3. Błędzenie cząsteczki kończymy w chwili, gdy osiągnie ona brzeg $\Gamma(D)$. Tak zaobserwowanej trajektorii przypisujemy wartość funkcji w tym punkcie brzegowym.
- ▶ Kroki 1–3 powtarzamy n razy.
 - ▶ Oszacowaniem wartości funkcji w punkcie (x_1, x_2, \dots, x_k) jest średnia arytmetyczna powyższych wartości dla wszystkich zaobserwowanych trajektorii.

Metoda błędzenia przypadkowego ze zmienną długością kroku 11

- ▶ Najbardziej efektywny sposób rozwiązania otrzymamy wtedy, gdy cząsteczka możliwie jak najszybciej osiągnie brzeg.
- ▷ Ponieważ promień konstruowanej sfery może być dowolny, więc najlepiej wybierać go tak, aby na każdym etapie obliczeń konstruować możliwie największą sferę, jaka jeszcze mieści się w obszarze D .



Przykładowa trajektoria punktu X błędzącego ze zmienną długością kroku.

- **Problem:**
Sfera styka się z brzegiem obszaru w jednym punkcie!
⇒ Prawdopodobieństwo wylosowania takiego punktu wynosi zero!
- ▶ **Rozwiązanie:**
Uznaje się, że cząsteczka osiągnęła brzeg, gdy jej odległość od brzegu nie przekracza ustalonej małej liczby δ .
▷ Liczba δ może być tak dobrana, żeby błąd oszacowania wartości funkcji w danym punkcie nie przekraczał ustalonej liczby ϵ .

Przykładowe wyniki rozwiązania równania Laplace'a na kwadracie ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$) z warunkami brzegowymi: $u(0, y) = 1$, $u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0$.

Metoda	Punkt		Liczba trajektorii	Średnia liczba kroków w jednej trajektorii	Czas obliczeń (s)	Rozwiązanie	
	x	y				Monte Carlo	dokładne
Stały krok $h = 0.05$	0.3	0.3	2000	89.87	42.0	0.396	0.4028
			4000	88.76	83.0	0.399	
	0.5	0.1	2000	46.05	21.5	0.075	0.0816
			4000	46.83	43.8	0.078	
	0.5	0.5	2000	115.83	54.1	0.247	0.2500
			4000	117.26	109.6	0.248	
Zmienna długość kroku	0.3	0.3	2000	6.06	17.9	0.398	0.4028
			4000	6.06	35.8	0.395	
	0.5	0.1	2000	6.04	18.0	0.078	0.0816
			4000	6.16	36.7	0.080	
	0.5	0.5	2000	5.07	14.5	0.255	0.2500
			4000	5.02	28.8	0.252	

Znaleźć wartości funkcji $u(x_1, x_2, \dots, x_k)$ spełniającej równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0, \quad (x_1, x_2, \dots, x_k) \in D \subset \mathbb{R}^k, \quad (5)$$

wewnątrz obszaru D , jeżeli na brzegu $\Gamma(D)$ tego obszaru spełnia ona następujący warunek:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial n} + g(x_1, x_2, \dots, x_k) u(x_1, x_2, \dots, x_k) = h(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (6)$$

gdzie $\partial u / \partial n$ jest pochodną funkcji u wzdłuż normalnej do brzegu $\Gamma(D)$ w kierunku wnętrza obszaru D .

Możliwe przypadki:

- $f \equiv 0 \rightarrow$ zagadnienie Dirichleta.
- $g \equiv 0 \rightarrow$ zagadnienie Neumanna (drugie zagadnienie brzegowe).
- Ogólny przypadek \rightarrow trzecie zagadnienie brzegowe (zagadnienie mieszane).

Rozważymy przypadek $k = 2$ (uogólnienie na dowolne k jest proste).

► Równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2. \quad (7)$$

► Warunek brzegowy:

$$f(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} + g(x, y) u(x, y) = h(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma(D). \quad (8)$$

⇒ Równanie różnicowe dla punktu wewnętrznego (x, y) :

$$u(x, y) = \frac{1}{4} [u(x - h, y) + u(x + h, y) + u(x, y - h) + u(x, y + h)].$$

● Reguła błędzenia przypadkowego dla punktów wewnętrznych:

Jeżeli w chwili t cząsteczka znajduje się w punkcie wewnętrznym (x, y) , to w chwili $(t + 1)$ znajdzie się z jednakowym prawdopodobieństwem w jednym z punktów sąsiednich: $(x - h, y)$, $(x + h, y)$, $(x, y - h)$, $(x, y + h)$.

Reguły błędzenia przypadkowego dla punktów zewnętrznych:

- Punkt brzegowy Q sąsiaduje tylko z jednym punktem wewnętrznym P

▷ Warunek brzegowy, gdy normalna do brzegu w punkcie Q jest równoległa do krawędzi siatki:

$$f(Q) \frac{u(P) - u(Q)}{h} + g(Q) u(Q) = h(Q).$$

Rozwiązując powyższe równanie względem $u(Q)$ dostajemy:

$$u(Q) = \frac{f(Q) u(P)}{f(Q) - h g(Q)} - h \frac{h(Q)}{f(Q) - h g(Q)}.$$

▷ Wprowadźmy oznaczenia:

$$\phi(Q) = \frac{f(Q)}{p[f(Q) - h g(Q)]}, \quad \psi(Q) = -h \frac{h(Q)}{(1-p)[f(Q) - h g(Q)]},$$

gdzie p dowolny ułamek dodatni: $0 < p < 1$.

▶ Zatem:

$$u(Q) = p \phi(Q) u(P) + (1-p) \psi(Q).$$

Tzn. $u(Q)$ może być interpretowane jako wartość oczekiwana zmiennej losowej, która z prawdopodobieństwem p przyjmuje wartość $u(P) \phi(Q)$, a z prawdopodobieństwem $(1-p)$ przyjmuje wartość $\psi(Q)$.

- Punkt brzegowy Q sąsiaduje tylko z jednym punktem wewnętrznym P – c.d.

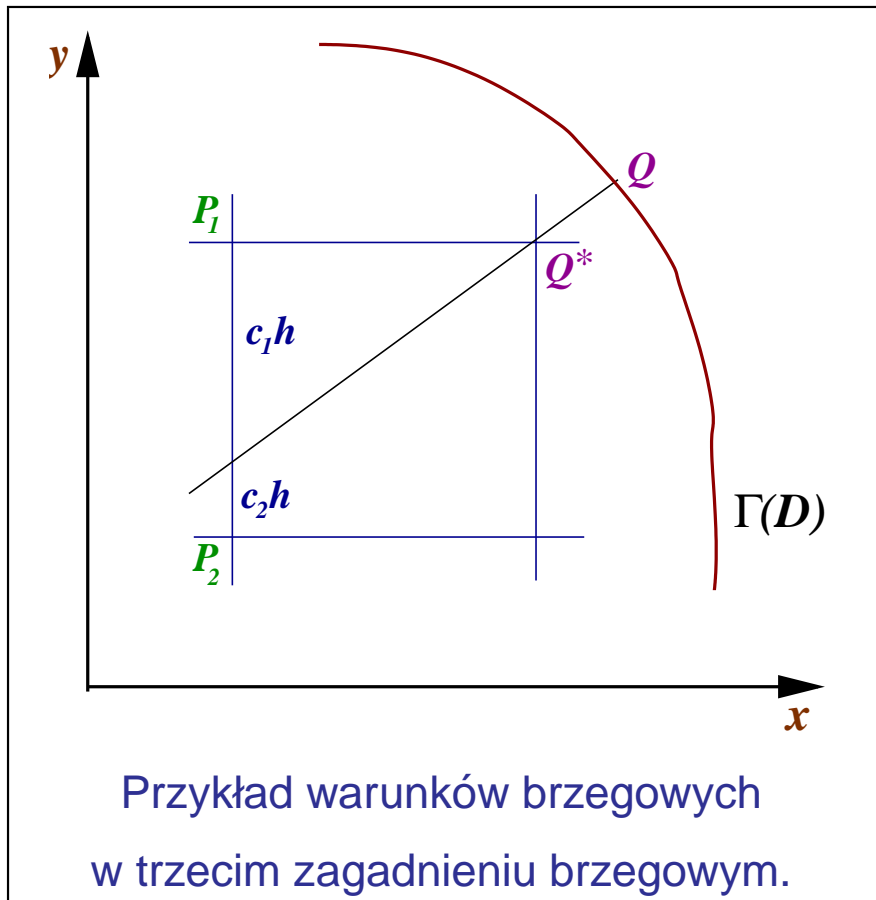
Reguła błędzenia przypadkowego:

1. Cząsteczce X startującej z punktu wewnętrznego (x, y) przypisujemy wagę $W = 1$.
2. Jeżeli cząsteczka X znajdzie się w chwili t w punkcie brzegowym Q , to z prawdopodobieństwem p wraca do P i otrzymuje nową wagę równą $W\phi(Q)$ lub z prawdopodobieństwem $(1 - p)$ kończy błędzenie w punkcie Q i otrzymuje wagę $W\psi(Q)$.
3. Każdej trajektorii przypisujemy wartość równą wadze cząsteczki w chwili zakończenia błędzenia. To znaczy, że trajektorii, która zakończyła się w punkcie Q , a przedtem przechodziła przez punkty brzegowe $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(\nu)}$ sąsiadujące tylko z pojedynczym punktem wewnętrznym przypiszemy wartość:

$$\phi(Q^{(1)}) \phi(Q^{(2)}) \dots \phi(Q^{(\nu)}) \psi(Q).$$

- ▷ W ogólnym przypadku obliczenie pochodnej wzdłuż normalnej jest bardziej skomplikowane.

Ogólniejsze warunki brzegowe



► Warunki brzegowe w postaci różnicowej:

$$f(Q) \frac{1}{h\sqrt{1+c_1^2}} [c_2 u(P_1) + c_1 u(P_2) - u(Q^*)] + g(Q) u(Q^*) = h(Q).$$

▷ Wprowadzając oznaczenia:

$$\phi_1(Q^*) = \frac{c_1 f(Q)}{p_1 [f(Q) - h\sqrt{1+c_1^2} g(Q)]},$$

$$\phi_2(Q^*) = \frac{c_2 f(Q)}{p_2 [f(Q) - h\sqrt{1+c_1^2} g(Q)]},$$

$$\psi(Q^*) = -h \frac{\sqrt{1+c_2^2} h(Q)}{p_3 [f(Q) - h\sqrt{1+c_1^2} g(Q)]},$$

otrzymujemy:

$$u(Q^*) = p_1 \phi_1(Q^*) u(P_1) + p_2 \phi_2(Q^*) u(P_2) + p_3 \psi(Q^*),$$

gdzie liczby p_1, p_2, p_3 są dobrane tak, aby mogły być interpretowane jako prawdopodobieństwa, tzn. są dodatnie i $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Ogólniejsze warunki brzegowe – c.d.

Reguła błądzenia przypadkowego:

1. Cząsteczce X startującej z punktu wewnętrznego (x, y) przypisujemy wagę $W = 1$.
 2. Jeżeli cząsteczka X znajdzie się w chwili t w punkcie brzegowym Q^* , to:
 - z prawdopodobieństwem p_1 przechodzi do P_1 i zmienia swoją wagę na $W\phi_1(Q^*)$,
 - z prawdopodobieństwem p_2 przechodzi do P_2 i zmienia swoją wagę na $W\phi_2(Q^*)$ lub
 - z prawdopodobieństwem p_3 kończy błądzenie w punkcie Q^* i otrzymuje wagę $W\psi(Q^*)$.
 3. Każdej trajektorii przypisujemy wartość równą wadze cząsteczki w chwili zakończenia błądzenia.
- ▷ W szczególnych przypadkach powyższa procedura może ulec znacznemu uproszczeniu
→ patrz przykład poniżej.

Przykład:

- Obszar prostokątny:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}.$$

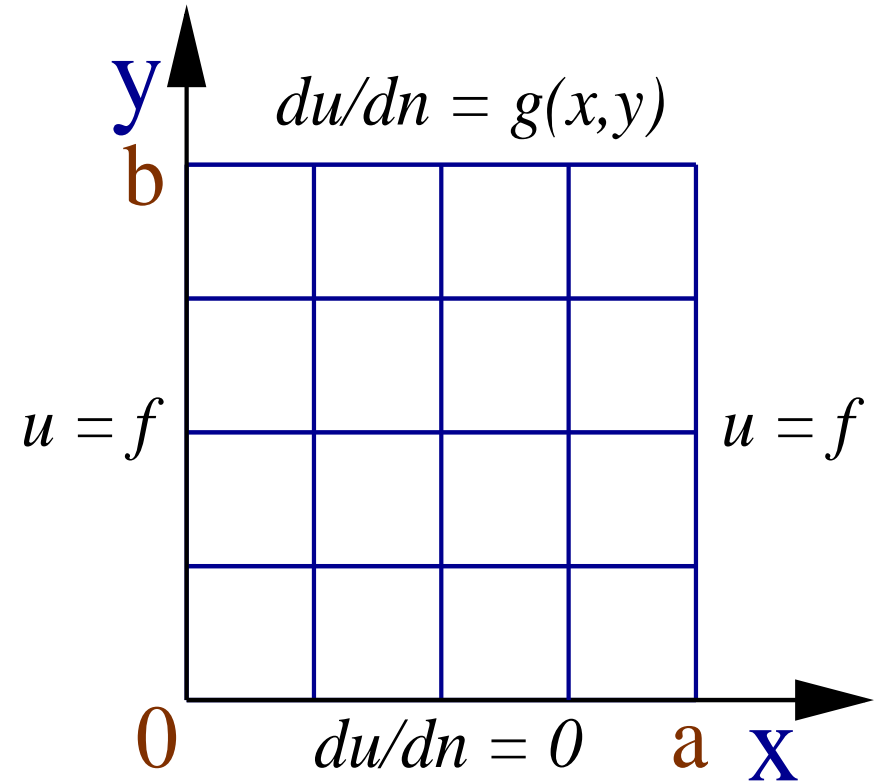
- Warunki brzegowe:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dla } y = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y) \text{ dla } y = b;$$

$$u(x, y) = f(x, y) \text{ dla } x = 0 \text{ oraz } x = a,$$

gdzie funkcje f i g są dane.



- Szukamy rozwiązania u równania Laplace'a w punkcie (x, y) wewnątrz obszaru D .

Schemat błędzenia przypadkowego:

1. Umieszczamy cząsteczkę w punkcie (x, y) wewnątrz obszaru D , przypisujemy jej **wagę** 0.
2. Jeżeli cząsteczka jest w punkcie wewnętrznym, to z jednakowym prawdopodobieństwem przechodzi do jednego z punktów sąsiednich.
3. Jeżeli cząsteczka znajdzie się na brzegu $y = 0$, to jej zachowanie określone jest przez równanie różnicowe

$$u(x, 1) - u(x, 0) = 0,$$

które jest odpowiednikiem warunku brzegowego $\partial u / \partial n = 0$. Oznacza to, że z punktu $(x, 0)$, cząsteczka przechodzi z powrotem („odbija się”) do punktu $(x, 1)$.

4. Gdy cząsteczka znajdzie się w punkcie (x, b) , to zgodnie z warunkiem brzegowym:

$$u(x, b) = u(x, b - 1) + g(x, y),$$

w następnej chwili znajdzie się w punkcie $(x, b - 1)$ i jej **waga** zostanie zwiększona o $g(x, b)$.

5. Jeżeli cząsteczka osiągnie brzeg $x = 0$ lub $x = a$, to jej błędzenie zostanie **zakończone** i jej **waga** zostanie zwiększona o wartość funkcji f w tym punkcie brzegowym.

▷ **Waga ta zostaje przypisana danej trajektorii jako wartość badanej zmiennej losowej.**

- W tym schemacie punkty $(x, 0)$ i (x, b) zachowują się jak ekrany odbijające, natomiast punkty $(0, y)$ i (a, y) – jak ekrany pochłaniające.