Odwracanie macierzy oraz rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych metodami błądzenia przypadkowego

- **Odwracanie macierzy.**
  - ▷ **Metoda podstawowa.**
  - ▷ **Metoda dualna.**
- **Równania różniczkowe cząstkowe.**
  - ▷ **Wprowadzenie.**
  - ▷ **Równanie Laplace'a – zagadnienie Dirichleta.**
  - ▷ **Równania paraboliczne.**

- Metody rozwiązywania układów równań liniowych można zastosować do odwracania macierzy.

► Kolejne kolumny macierzy odwrotnej można znaleźć rozwiązując kolejno układy równań:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \hat{\mathbf{e}}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie $\hat{\mathbf{e}}_i$ jest i-tym wersorem.

¶ **Dygresja:** Metoda von Neumanna–Ulama została początkowo opublikowana jako metoda odwracania macierzy.

► W celu odwrócenia macierzy $\mathbf{A}$, dobieramy macierz pomocniczą $\mathbf{M}$ tak, aby macierz:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{MA}\,,$$

spełniała warunek normalizacji:

$$\|\mathbf{H}\| \equiv \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |h_{ij}| \; < 1\,,$$

gdzie $\mathbf{I}$ – macierz jednostkowa.

▷ Następnie macierz $(\mathbf{MA})^{-\mathbf{1}}$ rozwijamy w szereg:

$$(\mathbf{MA})^{-\mathbf{1}} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-\mathbf{1}} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^2 + \ldots + \mathbf{H}^k + \ldots \tag{1}$$

► Macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}$ otrzymujemy ze wzoru:

$$\mathbf{A}^{-\mathbf{1}} = \mathbf{A}^{-\mathbf{1}}\mathbf{M}^{-\mathbf{1}}\mathbf{M} = (\mathbf{MA})^{-\mathbf{1}}\mathbf{M}\,.$$

▷ Dla (i,j)-ego elementu macierzy $(\mathbf{MA})^{-\mathbf{1}}$ mamy:

$$\begin{aligned}(\mathbf{MA})^{-\mathbf{1}}{}_{ij} &= \delta_{ij} + h_{ij} + \sum_{i_1=1}^{n} h_{ii_1} h_{i_1,j} + \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} h_{ii_1} h_{i_1 i_2} h_{i_2 j} + \ldots \\ &+ \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n} h_{ii_1} h_{i_1 i_2}\ldots h_{i_{k-1} i_k} h_{i_k j} + \ldots,\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie δ_{ij} – delta Kroneckera.

Schemat:

Wybieramy (dowolnie) macierz przejść $P = (p_{ij})$ o następujących własnościach:

$$p_{ij} \geq 0, \qquad p_{ij} = 0 \text{ gdy } h_{ij} = 0, \qquad p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} > 0\,.$$

▶ Konstruujemy błądzenie przypadkowe punktu X po zbiorze indeksów $\{0, 1, \ldots, n\}$:

1. W chwili początkowej ($t = 0$) punkt X umieszczamy w stanie $i_0 = i$.
2. Jeżeli w chwili t punkt X znajduje się w stanie i_t $(i_t \neq 0)$, to w chwili $(t+1)$ znajdzie się w stanie i_{t+1} z prawdopodobieństwem $p_{i_t, i_{t+1}}$.
3. Błądzenie zostaje **zakończone**, gdy punkt X znajdzie się w stanie 0.

4. Zaobserwowanej trajektorii $\gamma_k = (i_0 = i, i_1, \ldots, i_k, 0)$ punktu X przypisujemy wartość:

$$X(\gamma_k) = \frac{h_{ii_1} h_{i_1 i_2} \ldots h_{i_{k-1} i_k}}{p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} i_k}} \, \frac{\delta_{i_k j}}{p_{i_k 0}} \, . \tag{3}$$

Kroki 1–4 powtarzamy N razy.

► Średnia arytmetyczna zaobserwowanych wartości $X(\gamma_k)$ jest estymatorem nieobciążonym elementu $(\mathbf{MA})^{-\mathbf{1}}{}_{ij}$.

Dowód:

Ponieważ prawdopodobieństwo zaobserwowania trajektorii γ_k wynosi:

$$P(\gamma_k) = p_{ii_1}\, p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{k-1} i_k}\, p_{i_k 0} \, ,$$

więc podobnie jak dla uogólnionej metody podstawowej von Neumanna–Ulama dla rozwiązywania układów równań liniowych dowodzi się, że:

$$E\{X(\gamma_k)\} = (\mathbf{MA})^{-\mathbf{1}}{}_{ij} \, . \qquad \boxtimes$$

► Innym estymatorem nieobciążonym elementu $(\mathbf{MA})^{-\mathbf{1}}{}_{ij}$ jest **estymator Wasowa**:

$$X^*(\gamma_k) = \sum_{m=0}^{k} \frac{h_{ii_1} h_{i_1 i_2} \ldots h_{i_{m-1} m_k}}{p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{m-1} i_m}} \, \delta_{i_m j} \, . \tag{4}$$

Odwracanie macierzy – metoda dualna

- Na zbiorze indeksów $\{0, 1, \ldots, n\}$ określamy (dowolnie) rozkład prawdopodobieństwa:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \text{ tzn. } q_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ oraz } \sum_{i=1}^{n} q_i = 1.$$

- Ustalamy (dowolnie) macierz P prawdopodobieństw przejść w procesie błądzenia przypadkowego punktu X – jak w metodzie podstawowej.

1. Stan początkowy i_0 wędrującego punktu X losujemy według rozkładu q_i: $\mathcal{P}\{i_0 = i\} = q_i$.
2. Jeżeli w chwili t punkt X znajduje się w stanie i_t $(i_t \neq 0)$, to z prawdopodobieństwem $p_{i_t, i_{t+1}}$ w chwili $(t+1)$ znajdzie się w stanie i_{t+1}.
3. Błądzenie kończy się z chwilą osiągnięcia przez punkt X stanu 0.
4. Trajektorii $\gamma = (i_0, i_1, \ldots, i_k, 0)$, $i_j \neq 0$ dla $0 \leq j \leq k$, przypisujemy macierz:

$$\mathbf{Y}(\gamma) = \frac{h_{i_1 i_0}\, h_{i_2 i_1} \ldots h_{i_k, i_{k-1}}}{p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} i_k}} \frac{1}{q_{i_0}\, p_{i_k 0}} \mathbf{e}_{i_k i_0} \quad \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ,$$

   gdzie $\mathbf{e_{ij}}$ – macierz, której (i, j)-ty element $= 1$, a pozostałe $= 0$.

Kroki 1–4 powtarzamy N razy.

► Średnia arytmetyczna zaobserwowanych macierzy $\mathbf{Y}(\gamma)$ jest estymatorem nieobciążonym macierzy odwrotnej $(\mathbf{MA})^{-1}$.

▷ Estymator Wasowa:

$$\mathbf{Y}^*(\gamma) = \sum_{m=0}^{k} \frac{h_{i_1 i_0}\, h_{i_2 i_1} \ldots h_{i_m, i_{m-1}}}{q_{i_0}\, p_{i_0 i_1}\, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m}} \mathbf{e}_{i_m i_0} \quad \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ,$$

▶ PRZYKŁAD:

Rozważmy błądzenie przypadkowe cząsteczki X po osi liczb rzeczywistych:

- W chwili $t = 0$ cząsteczka znajduje się w początku układu współrzędnych, tzn. w punkcie $x = 0$.
- Jeżeli w chwili t cząsteczka znajduje się w punkcie x, to w chwili $(t + 1)$ znajdzie się w punkcie $(x + 1)$ z prawdopodobieństwem p (dane) lub w punkcie $(x - 1)$ z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$.
- Poszczególne ruchy cząsteczki są niezależne.

▷ Zadanie: Opisać ruch cząsteczki, tzn. znaleźć funkcję, która podaje jej położenie w dowolnej chwili czasu $t > 0$.

Cząsteczka wykonuje ruchy przypadkowe $\longrightarrow$ zagadnienie probabilistyczne:

Ozn. $v(x, t)$ – prawdopodobieństwo, że w chwili czasu t cząsteczka X znajdzie się w punkcie x.

Dla funkcji $v(x, t)$ otrzymujemy następujące równanie:

$$v(x, t + 1) = p\, v(x - 1, t) + q\, v(x + 1, t)\,,$$

z warunkami początkowymi:

$$v(0, 0) = 1, \qquad v(x, 0) = 0 \;\text{ dla }\; x \neq 0.$$

$\Rightarrow$ Funkcja $v(x, t)$ jest w pełni określona dla wszystkich x oraz t.

Np. dla $t = 1$ mamy: $\quad v(x, 1) = p\, v(x - 1, 0) + q\, v(x + 1, 0)\,.$

Niech cząsteczka wykonuje kroki o długości Δx w chwilach $k\Delta t,\ k = 1, 2, \ldots$:

$$v(x, t + \Delta t) = p\, v(x - \Delta x, t) + q\, v(x + \Delta x, t)\,.$$

Rozwijając funkcję $v(x, t)$ w szereg Taylora do wyrazów liniowych w Δt i kwadratowych w Δx otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v(x,t) + \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\,\Delta t = {} & p\, v(x,t) - p\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{1}{2} p\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\,(\Delta x)^2 \\ & + q\, v(x,t) + q\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{1}{2} q\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\,(\Delta x)^2\,, \end{aligned}$$

skąd mamy:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\,\Delta t = -(p-q)\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\,(\Delta x)^2\,.$$

Dzieląc obie strony równania przez Δt i przechodząc do granicy $\Delta t \to 0$, tak aby:

$$(p-q)\,\frac{\Delta x}{\Delta t} \to 2c, \qquad \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \to 2D\,,$$

otrzymujemy **równanie Fokkera–Plancka** dla dyfuzji z prądem:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -2c\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + D\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\,,$$

gdzie D jest współczynnikiem dyfuzji, a c prędkością prądu (dla $c = 0$ błądzenie jest symetryczne).

▷ Przedstawiony przykład sugeruje sposób rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych (przynajmniej pewnej klasy) metodami błądzenia przypadkowego (łańcuchów Markowa).

▶ Teraz rozważymy pewne klasy równań róczniczkowych i spróbujemy sformułować dla nich problemy probabilistyczne w postaci łańcuchów Markowa (błądzenia przypadkowego), których rozwiązania są identyczne z rozwiązaniami tych równań.

Równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0\,, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in D \subset \mathbb{R}^k. \tag{5}$$

Funkcja $u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ spełniająca to równianie nazywa się **funkcją harmoniczną** (jest ciągła wraz z pierwszą i drugą pochodną). Jeżeli znane są wartości funkcji harmonicznej na brzegu $\Gamma(D)$ obszaru D, to są określone we wszystkich punktach wewnętrz tego obszaru.

- **Zagadnienie Dirichleta:**

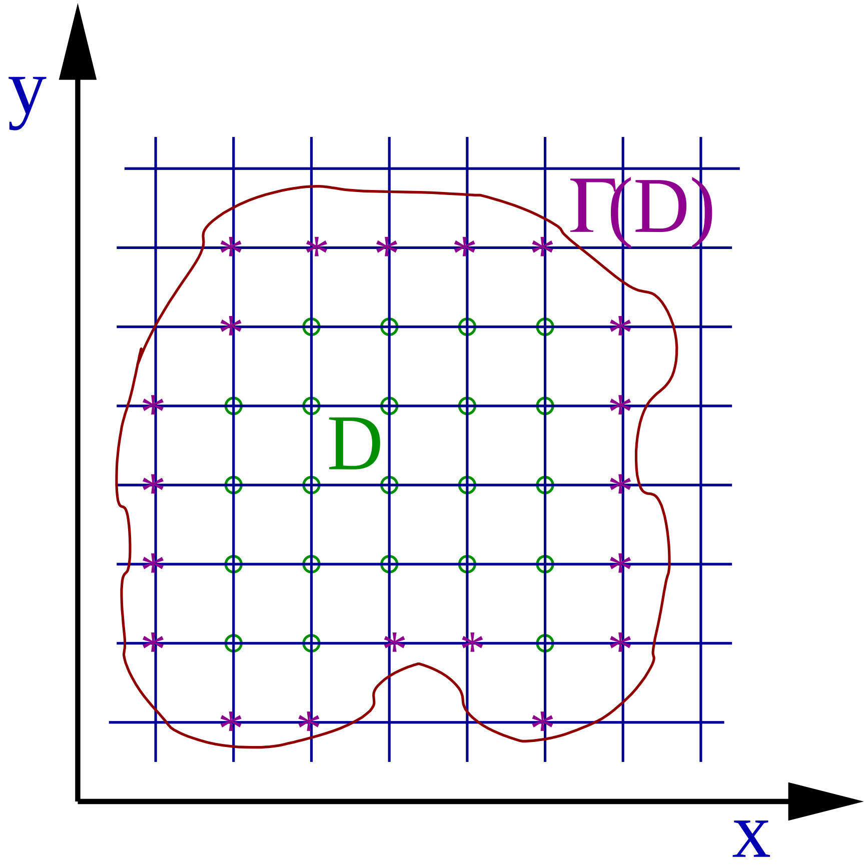
  Znaleźć wartości funkcji harmonicznej $u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ wewnątrz obszaru D, jeżeli na brzegu $\Gamma(D)$ tego obszaru przyjmuje ona wartości dane pewną funkcją f:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \Gamma(D)\,. \tag{6}$$

▷ Dalej będziemy rozważać przypadek $k = 2$, który łatwo jest uogólnić na dowolne k.

▶ Będziemy rozważać zagadnienie Dirichleta w formie dyskretnej:

- Obszar D pokrywamy siatką o kwadratowych oczkach o długości h.
- Pewne punkty traktujemy jako **punkty wewnętrzne** (zaznaczone na rysunku **kółkami**) – ich zbiór oznaczamy przez D^*.
- Inne punkty traktujemy jako **punkty brzegowe** (zaznaczone na rysunku **gwiazdkami**) – ich zbiór oznaczamy przez $\Gamma(D^*)$.



▷ Drugie pochodne funkcji u zamieniamy na przyrosty:

$$\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

i wybieramy jednostki tak, że $h = 1$.

⇒ **Zagadnienie Dirichleta w formie dyskretnej:**

Znaleźć funkcję u^*, która spełnia równanie różnicowe:

$$u^*(x,y) = \frac{1}{4}\left[u^*(x-1,y) + u^*(x+1,y) + u^*(x,y-1) + u^*(x,y+1)\right] \quad (7)$$

w punktach $(x,y) \in D^*$ przy warunkach:

$$u^*(x,y) = f^*(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma(D^*)\,, \quad (8)$$

gdzie f^* jest dyskretnym odpowiednikiem funkcji f.

▶ Rozważmy błądzenie przypadkowe cząsteczki X po siatce $D^* \cup \Gamma(D^*)$:

- W chwili $t = 0$ cząsteczka X znajduje się w pewnym punkcie początkowym $(\xi,\eta) \in D^*$.
- Jeżeli w chwili t cząsteczka znajduje się w punkcie (x,y), to w chwili $(t+1)$ znajdzie się z jednakowym prawdopodobieństwem w jednym z czterech sąsiednich punktów: $(x-1,y)$, $(x+1,y)$, $(x,y-1)$ lub $(x,y+1)$.
- Jeżeli cząsteczka X w pewnej chwili znajdzie się na brzegu $\Gamma(D^*)$, to **kończy** swój ruch.
- Każdej trajektorii cząsteczki X startującej z punktu (ξ,η) przypisujemy wartość zmiennej losowej: $v(\xi,\eta) = f^*(x,y)$, gdzie $(x,y) \in \Gamma(D^*)$.

Niech: $p_{\xi,\eta}(x,y)$ – prawdopodobieństwo tego, że cząsteczka X startująca z punktu (ξ,η) skończy swoje błądzenie w punkcie (x,y).

▷ **Możliwości:**

1. Punkt $(\xi,\eta) \in \Gamma(D^*)$, tzn. jest punktem **brzegowym** – wówczas:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) = (\xi,\eta), \\ 0, & (x,y) \neq (\xi,\eta) \end{cases} \tag{9}$$

2. Punkt $(\xi,\eta) \in D^*$, tzn. jest punktem **wewnętrznym** – wówczas:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{4}\left[p_{\xi-1,\eta}(x,y) + p_{\xi+1,\eta}(x,y) + p_{\xi,\eta-1}(x,y) + p_{\xi,\eta+1}(x,y)\right], \tag{10}$$

dlatego że cząsteczka startująca z tego punktu może dojść do punktu (x,y) tylko przez jeden z sąsiednich punktów punktów: $(x-1,y)$, $(x+1,y)$, $(x,y-1)$ lub $(x,y+1)$, których wybór jest jednakowo prawdopodobny.

▶ Wartość oczekiwana zmiennej losowej $v(\xi,\eta)$ jest dana przez:

$$E(\xi,\eta) = \sum_{(x,y)\in\Gamma^*} p_{\xi,\eta}(x,y)\, f^*(x,y), \tag{11}$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich punktach brzegowych.

Mnożąc równanie (10) przez $f^*(x,y)$ i sumując po wszystkich punktach brzegowych (x,y):

$$E(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\left[\,E(\xi-1,\eta) + E(\xi+1,\eta) + E(\xi,\eta-1) + E(\xi,\eta+1)\,\right]. \qquad (12)$$

Natomiast podstawiając wyrażenie (9) do wzoru (11) otrzymujemy:

$$E(\xi,\eta) = f^*(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \Gamma(D^*)\,. \qquad (13)$$

▷ Zatem wartość oczekiwana spełnia identyczne równania co funkcja $u^*(x,y)$.

► Z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a wynika, że:

$$E(x,y) \equiv u^*(x,y)\,.$$

Schemat szacowania $u^*(x,y),\ (x,y) \in D^*$:

1. Cząsteczkę X umieszczamy w punkcie (x,y).
2. Obserwujemy błądzenie tej cząsteczki do momentu, w którym osiągnie ona brzeg $\Gamma(D^*)$.
3. Obliczamy wartość funkcji f^* w punkcie brzegowym, do którego cząsteczka X dotarła.

Kroki 1–3 powtarzamy N razy.

$\longrightarrow$ Oszacowaniem wartości funkcji u^* w punkcie (x,y) jest średnia arytmetyczna zaobserwowanych wartości funkcji f^*.

▷ Można pokazać, że oczekiwany czas błądzenia da się oszacować z góry przez wielkość niezależną od liczby zmiennych – ważne dla wielu wymiarów!

Przykład dla zagadnienie Dirichleta

Funkcja $u(x,y)$ spełnia równanie Laplace'a na kwadracie $0 \leq x, y \leq 4$ z warunkami brzegowymi:

$$u(x,0) = 0\,, \quad u(4,y) = y\,, \quad u(x,4) = x\,, \quad u(0,y) = 0\,. \tag{14}$$

▶ Znaleźć wartość tej funkcji w punkcie $(2,2)$.

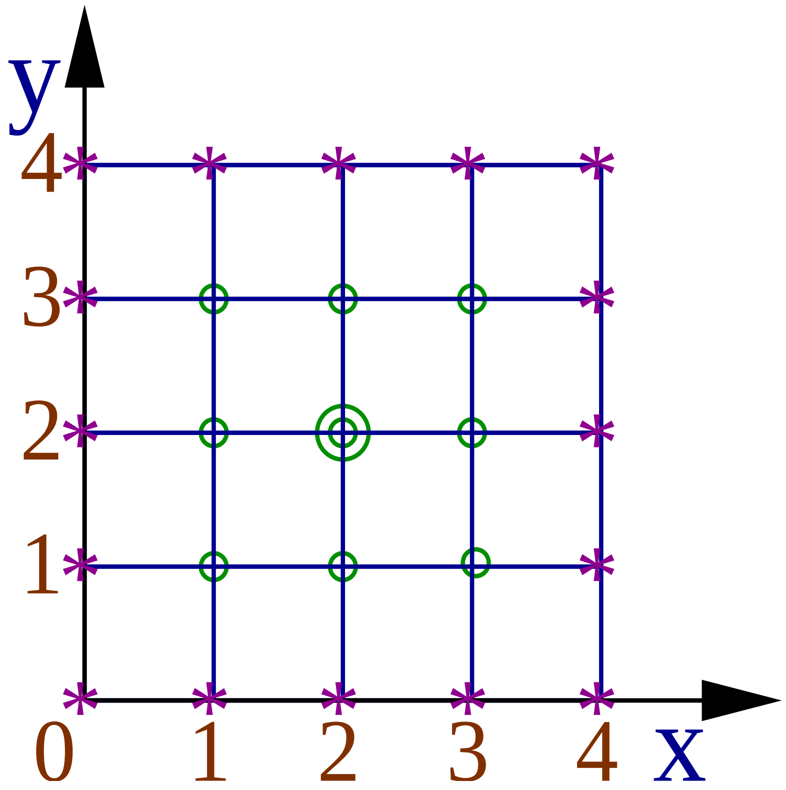
$\longrightarrow$ Rozwiązanie dokładne: $u(x,y) = xy/4$, tzn. $u(2,2) = 1$.

Rozwiązanie metodą błądzenia przypadkowego:

- Zamieniamy zagadnienie ciągłe na zagadnienie dyskretne budując siatkę kwadratową o oczkach długości $h = 1$.
- Obserwujemy wszystkie trajektorie rozpoczynające się w punkcie $(2,2)$ i kończące się na brzegu kwadratu, przypisując im odpowiednie wartości brzegowe funkcji u dane wzorami (14).

▷ Przykładowe rozwiązanie dla 20 trajektorii:

$$u(2,2) = 1.0 \pm 0.3351\,.$$



$\Rrightarrow$ Ćw. N11.1: Rozwiązać powyższy problem metodą błądzenia przypadkowego.

Zagadnienie:

Znaleźć taką funkcję $u(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)$, która wewnątrz obszaru $D \subset \mathbb{R}^k$ spełnia równanie paraboliczne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = c\,\frac{\partial u}{\partial t} \tag{15}$$

z warunkami brzegowymi:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = g(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)\,, \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \Gamma(D)\,,$$

oraz warunkami początkowymi:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0) = h(x_1, x_2, \ldots, x_k)\,, \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in D\,.$$

▷ W ogólniejszym przypadku warunki te mogą zawierać również pochodne funkcji u.

▶ Podamy metodę rozwiązywania tych równań w oparciu o błądzenie przypadkowe.

- Najpierw rozważymy przypadek jednowymiarowy.
- Następnie podamy uogólnienie na dowolną liczbę wymiarów.

Znaleźć taką funkcję $u(x,t)$, która spełnia równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

przy warunkach brzegowych:

$$u(0,t) = f_1(t)\,, \qquad u(a,t) = f_2(t)\,,$$

oraz warunkach początkowych:

$$u(x,0) = g(x)\,.$$

Zagadnienie to może być traktowane jako zadanie poszukiwania temperatury $u(x,t)$ pręta jednorodnego w chwili t w punkcie odległym o x jednostek od początku pręta, jeżeli wiadomo, że rozkład początkowy temperatury jest określony przez funkcję $g(x)$, zaś zmiana temperatury na końcach $x=0$ oraz $x=a$ dana jest funkcjami $f_1(t)$ oraz $f_2(t)$.

▶ Dyskretyzujemy powyższy problem przyjmując:

$x = k\,h\,,$ gdzie $h = \frac{a}{n},\;\; k = 1,\ldots,n;\qquad t = j\,l\,,\;\; j = 0,1,2,\ldots,\; l$ – stała.

⇒ Równanie różnicowe:

$$\frac{u(x+h,t-l) - 2u(x,t-l) + u(x-h,t-l)}{h^2} = c\,\frac{u(x,t) - u(x,t-l)}{l}\,.$$

▷ Kroki h i l dobieramy tak, aby: $c\,h^2 = 2\,l\,.$

▶ Wówczas otrzymujemy równanie:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,u(x+h,t-l) + \frac{1}{2}\,u(x-h,t-l)\,.$$

$\longrightarrow$ Wartość funkcji u w punkcie x w chwili t może być oszacowana jako średnia arytmetyczna tej funkcji w punktach $x+h$ i $x-h$ w chwili poprzedniej.

Schemat szacowania wartości funkcji u w chwili τ w ustalonym punkcie ξ:

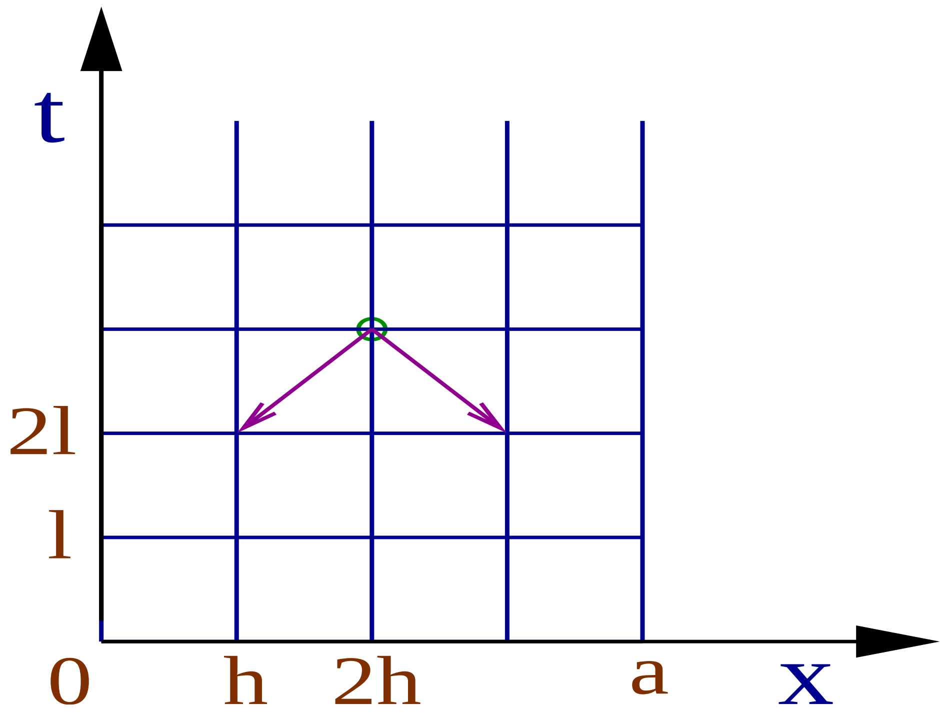
1. Cząsteczkę X umieszczamy w punkcie ξ i przypisujemy jej wagę τ równą współrzędnej czasowej tego punktu.
2. Jeżeli w pewnej chwili cząsteczka X znajduje się w punkcie x i jej współrzędna czasowa (waga) jest równa t, to w następnej chwili znajdzie się z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ w punkcie $x+h$ lub z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ w punkcie $x-h$; nowa waga cząsteczki będzie równa $t-l$.
3. Cząsteczka X kończy swoje błądzenie w jednej z dwóch sytuacji:
   - W pewnej chwili osiągnie punkt $x=0$ lub $x=a$ – takiej trajektorii przypisujemy wartości odpowiednio $f_1(t)$ lub $f_2(t)$, gdzie t jest aktualną wagą cząsteczki.
   - Współrzędna czasowa (waga) cząsteczki stanie się równa zeru – takiej trajektorii przypisujemy wartość $g(x)$, gdzie x jest aktualną współrzędną przestrzenną cząsteczki.

Kroki 1–3 powtarzamy N razy.

$\longrightarrow$ Oszacowaniem wartości funkcji u w punkcie ξ w chwili τ jest średnia arytmetyczna zaobserwowanych wartości przypisanych trajektoriom.

Uwaga:

Zagadnienie jednowymiarowe może być rozpatrywane jako zagadnienie dwuwymiarowe w przestrzeni punktów (x, t) na niegraniczonym (w kierunku zmiennej t) obszarze. Brzeg tego obszaru będzie osiągany po co najwyżej τ/l krokach.



Uogólnienie na k wymiarów:

▶ Dobierając wielkości k oraz l tak, aby:

$$\frac{c\,h^2}{l} = 2k\,,$$

otrzymujemy:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) =$$

$$\frac{1}{2k}\Big[u(x_1 + h, x_2, \ldots, x_k, t - l) + u(x_1 - h, x_2, \ldots, x_k, t - l) + \ \ldots$$

$$+ \, u(x_1, x_2, \ldots, x_k + h, t - l) + u(x_1, x_2, \ldots, x_k - h, t - l)\Big]\,.$$

▷ Problem k-wymiarowy możemy rozwiązać metodą błądzenia przypadkowego w nieograniczonym obszarze ,,czasoprzestrzeni" $(k + 1)$-wymiarowej punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)$.

▷ Postępujemy analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym, z tym że teraz prawdopodobieństwo przejścia do jednego z sąsiednich $2k$ punktów wynosi $\frac{1}{2k}$.

⇛ Ćw. N11.2: Zaimplementować algorytm rozwiązywania jednowymiarowego równania parabolicznego metodą błądzenia przypadkowego i wykonać obliczenia dla wybranych warunków brzegowych i początkowych oraz stałych h i l.