Komputerowa analiza zagadnień różniczkowych

1. Równania różniczkowe zwyczajne — podstawy teoretyczne

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

2013

Zasady

- zaliczenie ćwiczeń
- egzamin ustny; na egzaminie <u>można</u> korzystać z notatek

Copyright © 2009-13 P. F. Góra

Program

1. Zagadnienia wstępne, twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności
2. Równania liniowe; równania liniowe o stałych współczynnikach
3. Pewne inne równania dające się rozwiązać analitycznie, punkty spoczynku i ich klasyfikacja, cykle graniczne
4. Jawna i niejawna metoda Eulera; zgodność i stabilność; układy sztywne; jawna i niejawna metoda punktu środkowego
5. Metody Rungego-Kutty (klasyfikacja; zasady wyprowadzania; metoda grafowa (*Rooted trees*); obszary stabilności; podwajanie-połowienie kroku; metody zagnieżdżone; pewne metody specjalne)
6. Metody wielokrokowe (klasyfikacja; zasady wyprowadzania; obszary stabilności; zmiana kroku; metody predyktor-korektor)
7. Metody Verleta

8. Stochastyczne równania różniczkowe; rachunek Ito
9. Równania z opóźnionym argumentem
10. Równania algebraiczno-różniczkowe; równania zwyczajne z niezmiennikami
11. Dwupunktowe problemy brzegowe (postawienie problemu; twierdzenia o istnieniu, metoda strzelania, metody siatkowe)
12. Równania różniczkowe cząstkowe (klasyfikacja, przykłady “równań fizyki matematycznej”, charakterystyki, metody rózniczkowe, zarys MES)

Wstęp

Najogólniejszą postacią równania różniczkowego zwyczajnego (ODE, *Ordinary Differential Equation*) rzędu n jest wyrażenie postaci

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0\,, \tag{1}$$

gdzie $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lub, niekiedy, $y\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Copyright © 2009-13 P. F. Góra

Jeśli pochodna F po ostatnim argumencie nie znika (przynajmniej lokalnie), (1) zapisujemy jako

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \widetilde{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right). \tag{2}$$

Trzeba jednak pamiętać, iż transformacja od (1) do (2) może wymagać dookreślenia (w tym sensie równanie (1) może nie być jednoznaczne).

Przykład: Równanie

$$(\dot{y})^2 + y^2 = 1 \tag{3a}$$

można zinterpretować na jeden z dwu sposobów:

$$\dot{y} = \sqrt{1-y^2}\,, \tag{3b}$$

$$\dot{y} = -\sqrt{1-y^2}\,. \tag{3c}$$

Notacja: $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} \equiv \frac{d^2y}{dt^2}$.

Przykład

Rozważmy równanie

$$(1-y)\ddot{y} - \dot{y}^2 + y = 0\,. \tag{4}$$

Poza punktem $y = 1$ nie ma problemu[*]. Co zrobić dla $y = 1$? Możliwe są *dwa* scenariusze:

$$\dot{y}\big|_{y=1} = \begin{cases} 1 & \text{lub} \\ -1 \end{cases} \tag{5}$$

Który wybrać?

[*]Pozornie!

Układy równań pierwszego rzędu

Równanie w postaci (2) na ogół przedstawia się w postaci układu n równań pierwszego rzędu. Najprostsza — co nie oznacza, iż w każdym wypadku najlepsza — transformacja od równania rzędu n do układu n równań pierwszego rzędu ma postać:

$$\begin{gathered} y_1 \equiv y\,, \\ \frac{dy}{dx} \equiv \frac{dy_1}{dx} = y_2\,,\ \frac{d^2y}{dx^2} \equiv \frac{dy_2}{dx} = y_3\,,\ \dots\,,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \equiv \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n\,, \\ \frac{d^ny}{dx^n} \equiv \frac{dy_n}{dx} = \widetilde{F}(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Dlatego od tej pory *będziemy się zajmować głównie układami równań rzędu pierwszego*. Układy te nie muszą mieć postaci sugerowanej przez transformację (6), ale widać, że takie zainteresowanie nie ogranicza ogólności rozważań.

Copyright © 2009-13 P. F. Góra

Rozwiązania ogólne i szczególne

Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n nazywam najbardziej ogólną postać funkcji $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, klasy co najmniej C^n, spełniającą równanie (2). Rozwiązanie to zależy od n parametrów.

Przykład: Rozwiązaniem ogólnym równania oscylatora harmonicznego

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \tag{7}$$

jest funkcja

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)\,. \tag{8}$$

Rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n jest pewien “przypadek szczególny” rozwiązania ogólnego — taki, w którym wartości wszystkich stałych dowolnych zostały ustalone, najczęściej poprzez podanie warunków, jakie ma spełniać rozwiązanie równania.

Przykład: Rozwiązaniem szczególnym równania oscylatora harmonicznego (7) może być funkcja

$$y(t) = \cos \omega t\,. \tag{9a}$$

Innym rozwiązaniem szczególnym tego równania może być funkcja

$$y(t) = -\frac{3}{4}\sin\left(\omega t + \frac{9\pi}{17}\right). \tag{9b}$$

Obserwacja: Rozwiązaniem szczególnym układu n równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego jest krzywa $\mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Numerycznie można poszukiwać tylko *szczególnych* (nie ogólnych) rozwiązań równań różniczkowych. Rozwiązanie równania rzędu n lub też, co równoważne, układu n równań rzędu pierwszego, zależy od n stałych wyznaczanych z warunków, jakie spełniać ma poszukiwana funkcja. Jeśli wszystkie te warunki zadane są w jednym punkcie, czyli dla jednej wartości zmiennej niezależnej, mówimy, iż dany jest problem początkowy, zwany inaczej problemem Cauchy'ego.

Problem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{10}$$

gdzie $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (czasami zamiast $\mathbb{R}$ bierze się $\mathbb{C}$).

Copyright © 2009-13 P. F. Góra

Twierdzenie Peana

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja* $\mathbf{f}$ *jest ciągła w pasie* $x_0 \leqslant x \leqslant X$*, to problem Cauchy'ego* (10) *ma rozwiązanie w tym pasie.*

Tradycyjnie, acz niezgodnie z zasadami polszczyzny, twierdzenie to zwane jest “twierdzeniem Peano”.

Uwaga: Twierdzenie Peana nie gwarantuje *jednoznaczności* rozwiązań. Przykład: Problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dot{y} & = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) & = 0 \end{cases} \tag{11}$$

ma co najmniej dwa różne rozwiązania:

$$y_1(t) = 0\,, \tag{12a}$$

oraz

$$y_2(t) = \begin{cases} -t^2 & t \leqslant 0\,, \\ t^2 & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{12b}$$

(zauważmy, że $dy_2/dt = 2|t|$).

Twierdzenie Picarda

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja* f *jest ciągła w pasie* $x_0 \leqslant x \leqslant X$ *oraz spełnia warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną:*

$$\exists L > 0\ \forall\, x : x_0 \leqslant x \leqslant X,\ \forall\, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 : ||\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)|| \leqslant L||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||$$

to problem Cauchy'ego (10) *ma w tym pasie rozwiązanie i jest ono jednoznaczne.*

Metody numeryczne w zasadzie ograniczają się do przypadków spełniających założenia twierdzenia Picarda.

Copyright © 2009-13 P. F. Góra

Twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązania od warunków początkowych

Twierdzenie 3. *Niech funkcja* $\mathbf{f}$ *będzie różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu* $(x_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Wówczas istnieje takie otoczenie*
$U \subset \mathbb{R}$ *punktu* x_0 *i takie otoczenie* $S \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_0 \in S$*, w którym problem Cauchy'ego* $d\mathbf{y}/dx = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(\tilde{x}) = \tilde{\mathbf{y}}$ *ma rozwiązanie dla wszystkich* $\tilde{x} \in U$, $\tilde{\mathbf{y}} \in S$*. Rozwiązanie to zależy przy tym od punktu początkowego* $(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{y}})$ *w sposób ciągły.*

Najczęściej rozwiązywany problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = \lambda y \\ y(0) & = y_0 \end{cases} \tag{13}$$

Rozwiązaniem jest $y = y_0 \exp(\lambda t)$.

Copyright © 2009-13 P. F. Góra

Układ równań liniowych o stałych współczynnikach

Niech $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{C}^n$ i niech $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ będzie *diagonalizowalną* macierzą o stałych współczynnikach. Rozważam n-wymiarowy problem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{14}$$

$\mathbf{A}$ jest diagonalizowalna, to znaczy istnieje taka nieosobliwa macierz $\mathbf{X}$, że $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{A}_{\text{diag}} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Problem Cauchy'ego (14) można wobec tego przekształcić do postaci

$$\begin{cases} \mathbf{X}\dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{X}\mathbf{A}\,\underbrace{\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}}_{=\mathbb{I}}\,\mathbf{y} \\ \mathbf{X}\mathbf{y}(0) = \mathbf{X}\mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{15}$$

czyli

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{A}_{\text{diag}}\mathbf{z} \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \end{cases} \tag{16}$$

gdzie $\mathbf{z} = \mathbf{X}\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_0 = \mathbf{X}\mathbf{y}_0$. Taką transformację nazywa się sprowadzeniem układu równań do postaci normalnej. Jeżeli żadna z wartości własnych nie jest zdegenerowana, równania w postaci normalnej są *niezależne* — problem Cauchy'ego rozpada się na n niezależnych problemów:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_k}{dx} = \lambda_k z_k \\ z_k(0) = z_{0,k} \end{cases} \tag{17}$$

Wobec tego i wobec (13), $z_k(x) = z_{0,k} \exp \lambda_k x$, natomiast y_l jest kombinacją liniową takich eksponent. Rozwiązanie problemu Cauchy'ego (14) sprowadza się do diagonalizacji macierzy $\mathbf{A}$.

Formalne rozwiązanie problemu (14) ma postać

$$\mathbf{y} = \exp\left(\mathbf{A}x\right)\mathbf{y}_0 \,. \tag{18}$$

Funkcja wykładnicza macierzy

Niech $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ będzie stałą, diagonalizowalną macierzą:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}\,. \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\exp(\mathbf{A}t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}\right)^n t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\underbrace{\mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}\,\mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}\cdots\mathbf{X}^{-1}\text{diag}\{\lambda_i\}\mathbf{X}}_{n\ \text{razy}} \\
&= \mathbf{X}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\text{diag}\{\lambda_i^n\}\right)\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1}\,\text{diag}\left\{e^{\lambda_i t}\right\}\mathbf{X}
\end{aligned} \tag{20}$$

Jednorodne równanie liniowe

Jednorodnym równaniem liniowym rzędu n nazywam równanie

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{21}$$

gdzie $a_n(x) \neq 0$ w pewnym pasie $0 \leqslant x \leqslant X$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a_n(x)=1$. Równania takie odgrywają ważną rolę w wielu działach matematyki stosowanej.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są rozwiązaniami równania* (21)*, to także każda kombinacja liniowa $\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$ jest jego rozwiązaniem.*

Copyright © 2009-13 P. F. Góra

Równanie (21) możemy zapisać jako

$$\mathbf{L}(x)\,y = 0 \tag{22}$$

gdzie

$$\mathbf{L}(x) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \tag{23}$$

jest operatorem liniowym w pewnej przestrzeni funkcyjnej (takiej, aby wszystkie różniczkowania były dobrze określone). Widzimy, że wszystkie liniowo niezależne rozwiązania (21) rozpinają *jądro* (ang. *kernel*) operatora (23).

Istnieą metody znajdywania *analitycznych* rozwiązań pewnych typów równań różniczkowych liniowych o nie-stałych współczynnikach.

Równanie liniowe rzędu n o stałych współczynnikach

Jeżeli w równaniu (21) wszystkie współczynniki są stałe, $a_k(x) = \text{const}$, otrzymuję jednorodne równanie liniowe o stałych współczynnikach:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{24}$$

Wiadomo, że równanie takie można zastąpić przez pewien układ równań pierwszego rzędu. Za pomocą transformacji (6) otrzymujemy

$$\begin{cases} \dfrac{dy_n}{dx} + a_{n-1}y_n + a_{n-2}y_{n-1} + a_{n-3}y_{n-2} + \cdots + a_1 y_2 + a_0 y_1 = 0 \\ y_n = \dfrac{dy_{n-1}}{dx} \\ y_{n-1} = \dfrac{dy_{n-2}}{dx} \\ \dots \\ y_2 = \dfrac{dy_1}{dx} \end{cases} \tag{25}$$

W zapisie macierzowym

$$\frac{d}{dy}\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{macierz } n\times n} \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

W ten sposób równanie (24) sprowadziliśmy do postaci (14). Wiemy już, że trzeba znaleźć wartości własne macierzy występującej w (26).

Obliczam korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny:

$$
\det\begin{bmatrix}
-a_{n-1}-\lambda & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\
1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{bmatrix} =
$$

$$
(-a_{n-1}-\lambda)\det\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{bmatrix}
+ \underbrace{(-1)^3\det\begin{bmatrix}
-a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\
1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda
\end{bmatrix}}_{\mathcal{W}_2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^n(a_{n-1}+\lambda)\lambda^{n-1} - \mathcal{W}_2 \\
&= (-1)^n(a_{n-1}+\lambda)\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}a_{n-2}\lambda^{n-2} + \mathcal{W}_3 = \dots
\end{aligned} \tag{27}
$$

Ostatecznie stwierdzamy, że wartości własne są pierwiastkami równania

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{28}$$

Proszę to porównać z równaniem (24)**!**

Jeżeli wszystkie pierwiastki równania (28) są jednokrotne, *r*ozwiązanie ogólne równania (24) jest kombinacją liniową wyrażeń $\exp(\lambda_k x)$, gdzie λ_k są pierwiastkami rownania (28). Jeżeli występuje dwukrotny pierwiastek, powiedzmy λ_s, w rozwiązaniu pojawiają się człony $\exp(\lambda_s x)$ oraz $x \cdot \exp \lambda_s x$. Dla pierwiastka trójkrotnego — $\exp(\lambda_s x)$, $x \cdot \exp \lambda_s x$ oraz $x^2 \cdot \exp \lambda_s x$ etc.

Ponieważ wspólczynniki a_k są rzeczywiste, wszystkie pierwiastki λ_k są albo rzeczywiste, albo występują w parach sprzężonych. Oznacza to, że otrzymane rozwiązanie jest zawsze rzeczywiste, gdyż stałe można dobrać tak, że wszystkie zespolone funkcje wykładnicze zostaną zastąpione przez kombinacje liniowe funkcji sinus i kosinus.

Układ równań liniowych

Rozważmy problem Cauchy'ego zawierający układ równań liniowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{q}(x) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{29}$$

gdzie $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ niekoniecznie jest macierzą stałą. Z układem tym związany jest następujący jednorodny problem *macierzowy*

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbb{I} \end{cases} \tag{30}$$

$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwane jest rozwiązaniem fundamentalnym równnia (29).

Jeżeli macierz $\mathbf{Y}(x)$ jest odwracalna w pasie $0 < x < X$, rozwiązanie niejednorodnego równania (29) dane jest w tym pasie przez

$$\mathbf{x} = \mathbf{Y}(x)\left[\mathbf{y}_0 + \int\limits_0^x \mathbf{Y}^{-1}(x')\mathbf{q}(x')\,dx'\right] \tag{31}$$

Niejednorodny układ równań liniowych, pierwszego rzędu, o stałych współczynnikach

Niech $\mathbf{y}, \mathbf{g}(t) \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Rozważam równanie

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) \tag{32}$$

Jego rozwiązaniem jest

$$\mathbf{y}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{y}_0 + \int\limits_0^t \exp\left(\mathbf{A}(t-t')\right)\,\mathbf{g}(t')\,dt'\,, \tag{33}$$

gdzie $\mathbf{y}_0$ jest stałym wektorem (warunki początkowe).

Copyright © 2009-13 P. F. Góra

Niejednorodne równanie liniowe o stałych współczynnikach

Niejednorodnym równaniem liniowym rzędu n o stałych współczynnikach nazywam

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \quad (34)$$

Twierdzenie 5. *Rozwiązanie ogólne równania* (34) *jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i dowolnego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.*

Uzmienianie stałej

Równania jednorodne już rozwiązywać umiemy. Wystarczy więc znaleźć *dowolne* rozwiązanie równania niejednorodnego. Dla "przyjaznych" prawych stron daje się to zrobić metodą *uzmienniania stałej*. Jeżeli $C \cdot \exp(\lambda x)$ jest *jakimś* rozwiązaniem równania jednorodnego odpowidającego (34), rozwiązania szczegółowego poszukujemy w postaci

$$y = C(x) \cdot \exp(\lambda x) \tag{35a}$$

Wówczas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \exp(\lambda x) + \lambda y(x)\,, \tag{35b}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2C}{dx^2} \exp(\lambda x) + 2\frac{dC}{dx} \exp \lambda x + \lambda^2 y(x)\,, \dots \tag{35c}$$

Wyrażenia (35) wstawiamy do równania (34). Po uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy równanie różniczkowe na $C(x)$, prostsze od równania wyjściowego.

Przykład

Rozpatruję równanie

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y + f(x) \tag{36}$$

Rozwiązania szukam w postaci $C(x) \cdot \exp(\lambda x)$. Otrzymuję

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dx}e^{\lambda x} + \lambda y = \lambda y + f(x) \\ \frac{dC}{dx} = f(x)e^{-\lambda x} \end{aligned} \tag{37}$$