Komputerowa analiza zagadnień różniczkowych

11. Dwupunktowe problemy brzegowe

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

2013

Wprowadzenie

Rozważmy równanie różniczkowe

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})\,, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{y}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Rozwiązanie równania (1) zależy od n stałych wyznaczanych z warunków, jakie spełniać musi poszukiwana funkcja $\mathbf{y}$. Na Wykładzie 1 powiedzieliśmy, że *„jeśli wszystkie te warunki zadane są w jednym punkcie, równanie* (1) *wraz z warunkami narzuconymi na funkcję, nazywa się* problemem początkowym *czyli* problemem Cauchy'ego*”.*

A jeśli warunki **nie** są zadane w jednym punkcie?

Dwupunktowe problemy brzegowe

W praktyce dość często występują sytuacje, w których warunki zadane są w *dwu* punktach — na początku i na końcu przedziału, w którym poszukujemy rozwiązania. Oznaczmy ten przedział przez $[0, b]$. Warunki, które zadajemy, mają jedną z trzech postaci:

postać ogólna:
$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(b)) = 0\,, \tag{2a}$$

warunki liniowe:
$$\mathbf{B}_0\mathbf{y}(0) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = \mathbf{b}\,, \tag{2b}$$

rozszepa-rowane:
$$\begin{gathered} y_1(0) = \bar{y}_1, y_2(0) = \bar{y}_2, \dots, y_k(0) = \bar{y}_k, \\ y_{k+1}(b) = \bar{y}_{k+1}, \dots, y_n(b) = \bar{y}_n\,, \quad 1 < k < n\,. \end{gathered} \tag{2c}$$

$\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_b$ są stałymi macierzami, $\mathbf{b}$ jest stałym wektorem. Warunek w postaci (2c) jest szczególną postacią (2b), który jest szczególną postacią (2a).

Równanie (1) wraz z jednym z warunków (2) nazywam *dwupunktowym problemem brzegowym* (two-point Boundary Value Problem, BVP) dla równania różniczkowego zwyczajnego.

Przykład 1:

Znaleźć $y(t)$ spełniające

$$\ddot{y} + y = 0\,, \qquad (3)$$

$$y(0) = 0\,,\ y(b) = 1/2\,.$$

$$\left(\text{Rozwiązaniem jest } y(t) = \frac{\sin t}{2\sin b}\,.\right)$$

Przykład 2:

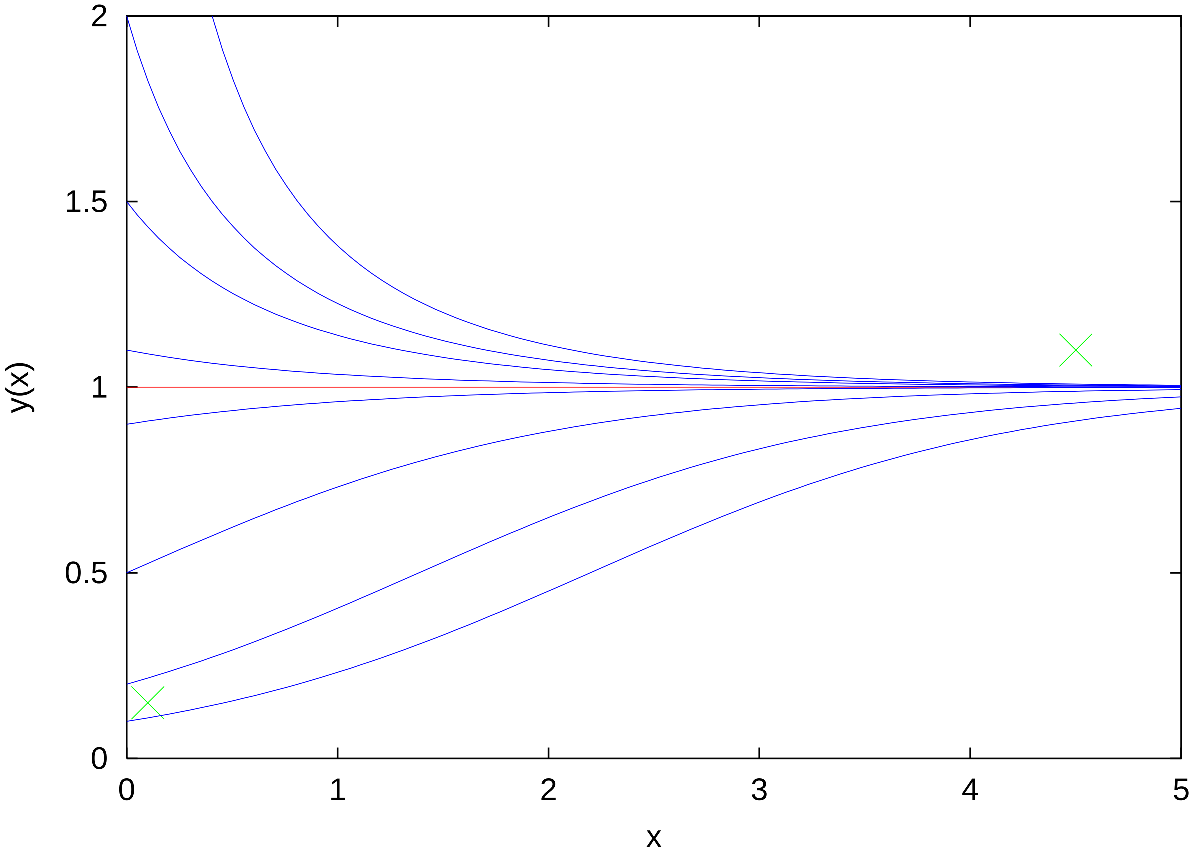
Równanie struny:

$$-(p(t)u')' + q(t)u = r(t)\,, \qquad (4)$$

$$u(0) = 0\,,\ u'(b) = 0\,.$$

BVP może nie mieć rozwiązania

Przykład 3 — ODE z separatrysą:



BVP może mieć niejednoznaczne rozwiązanie

Przykład 4: Problem

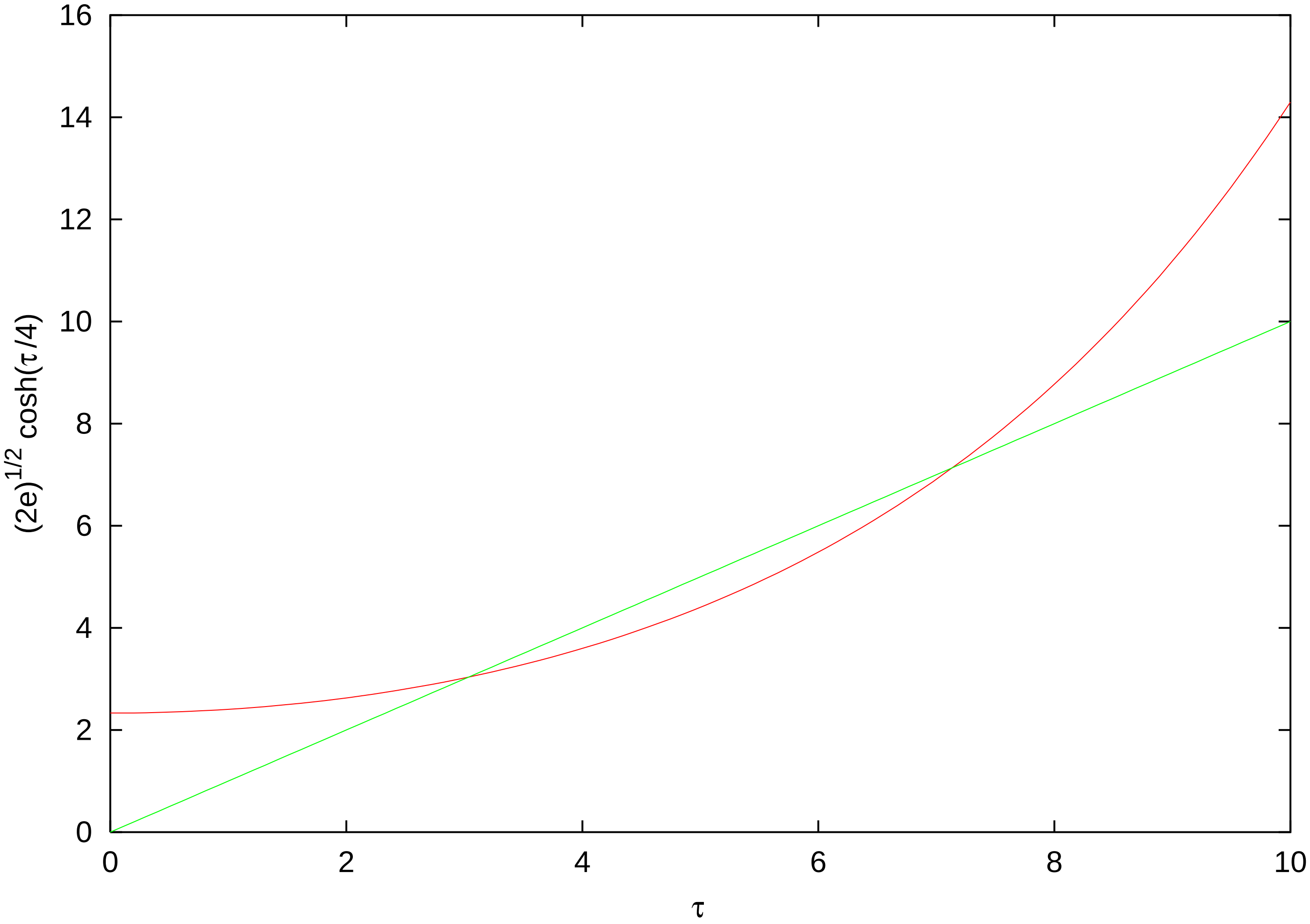
$$
\begin{aligned}
u'' + e^{u+1} &= 0\,, \\
u(0) = u(1) &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ma *dwa* rozwiązania dane przez

$$
u(t) = -2\ln\left\{\frac{\cosh\left[(t-1/2)\theta/2\right]}{\cosh(\theta/4)}\right\}\,, \tag{6a}
$$

gdzie θ spełnia

$$
\theta = \sqrt{2e}\cosh(\theta/4)\,. \tag{6b}
$$



16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
2
4
6
8
10
τ
(2e)^{1/2} cosh(τ/4)

Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań BVP. . .

. . . w ogólności nie są znane. Znane jest tylko twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań *liniowego BVP z liniowymi warunkami brzegowymi*: Równanie

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{q}(x) \tag{7}$$

wraz z warunkami brzegowymi postaci (2b) ma rozwiązanie, które jest przy tym jednoznaczne, wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A}, \mathbf{q}$ są ciągłe oraz gdy macierz

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b)\,, \tag{8a}$$

jest nieosobliwa, przy czym macierz $\mathbf{Y}(x)$ spełnia

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}\,, \tag{8b}$$

z warunkiem $\mathbf{Y}(0) = \mathbb{I}$.

Stabilność BVP

„Testowy” problem Cauchy’ego

$$\frac{dy_1}{dx} = -\lambda y_1\,,\; y_1(0) = 1\,, \tag{9}$$

jest stabilny gdy $\lambda > 0$. Dokonajmy w (9) zmiany zmiennych: $\tau = b - x$, $y_2(\tau) \equiv y_1(b - x)$. Wówczas $d/dx \to -d/d\tau$, $0 \to b$. Otrzymujemy

$$\frac{dy_2}{d\tau} = \lambda y_2\,,\; y_2(b) = 1\,. \tag{10}$$

Równanie (10) jest *tożsamościowo równoważne* równaniu (9) i *także* jest stabilne dla $\lambda > 0$. Równanie (10) odpowiada propagacji wstecz w czasie. O ile (9) jest problemem początkowym, (10) jest „problemem końcowym”.

Jeśli zapisać (9), (10) łącznie, otrzymujemy następujący problem brzegowy o rozseparowanych warunkach:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad (11)$$
$$y_1(0) = 1\,,\; y_2(b) = 1\,.$$

Z poprzedniej dyskusji widać, iż (11) jest, jako BVP, stabilny. Widzimy jednak, iż równanie różniczkowe w (11) *zawiera mody stabilne przy propagacji w przód oraz* inne *mody stabilne przy propagacji wstecz w czasie.*

Metoda strzelania — najprostszy przypadek

Rozważmy na początek równanie (1) z $n = 2$ oraz rozseparowanymi warunkami brzegowymi (2c):

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{y}}{dx} &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y})\,, && \text{(12a)}\\
y_1(0) &= y^{(1)}\,, && \text{(12b)}\\
y_2(b) &= y^{(b)}\,. && \text{(12c)}
\end{aligned}
$$

Równanie (12c) ma postać warunku końcowego. *Aby móc numerycznie rozwiązać problem (12), zamieniamy warunek końcowy na warunek początkowy*. Mamy zatem

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{y}}{dx} &= \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), && \text{(13a)}\\
y_1(0) &= y^{(1)}, && \text{(13b)}\\
y_2(0) &= c, && \text{(13c)}
\end{aligned}
$$

gdzie c przyjmujemy na początku w sposób (prawie) dowolny. Teraz, przy ustalonym c, rozwiązujemy numerycznie problem Cauchy'ego (13). Rozwiązanie numeryczne daje nam $y_2(b) = \tilde{y}_2^{(b)}$. Oczywiście $\tilde{y}_2^{(b)}$ jest funkcją c, $\tilde{y}_2^{(b)} = \tilde{y}_2^{(b)}(c)$. Rozwiązanie numeryczne spełnia warunek początkowy (12b). Żądamy, aby także warunek końcowy (12c) był spełniony:

$$
\tilde{y}_2^{(b)}(c) = y_2^{(b)} . \tag{14}
$$

(14) jest *równaniem algebraicznym na warunek początkowy* c — metoda strzelania oznacza konieczność rozwiązania tego równania algebraicznego. Zauważmy, że każdorazowe obliczenie lewej strony równania (14), oznacza konieczność numerycznego rozwiązania problemu Cauchy'ego (13). Podkreślam, że równanie to trzeba *rozwiązać* za pomocą odpowiedniej metody numerycznej (*regula falsi*, interpolacja odwrotna itp) — dosłowne strzelanie, czyli dobieranie c na chybił-trafił, na ogół przynosi kiepskie rezultaty.

Gdyby trzeba było "uzupełniać" więcej warunków początkowych (dla $n > 2$), zamiast równania (14) otrzymujemy *układ* równań algebraicznych. Można go prosto rozwiązywać metodami nie wymagającymi obliczania pochodnej lewej strony, a zatem *nie* wielowymiarową metodą Newtona. Użycie metody Newtona może przyspieszyć zbieżność, wymaga to jednak dodatkowej analizy teoretycznej — patrz niżej.

Przykład

Rozważmy BVP

$$\frac{dy}{dx} = -y + xz\,, \tag{15a}$$

$$\frac{dz}{dx} = y - 3z\,, \tag{15b}$$

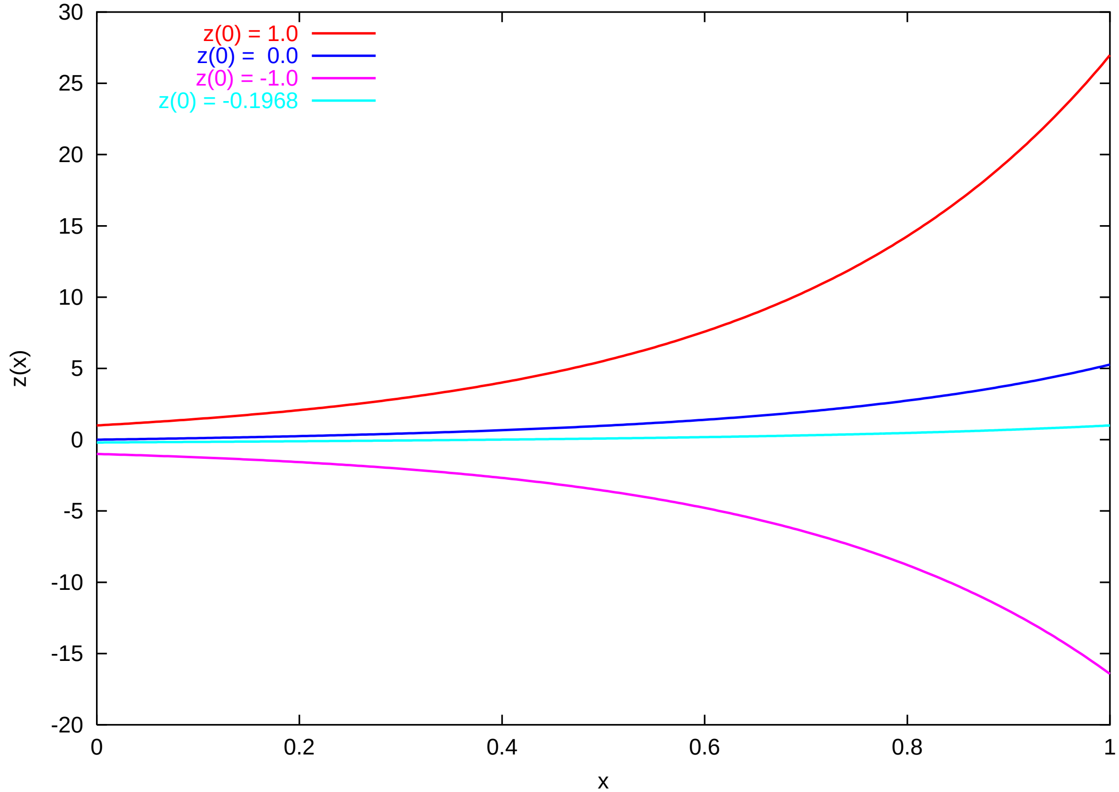
$$y(0) = 1\,, \tag{15c}$$

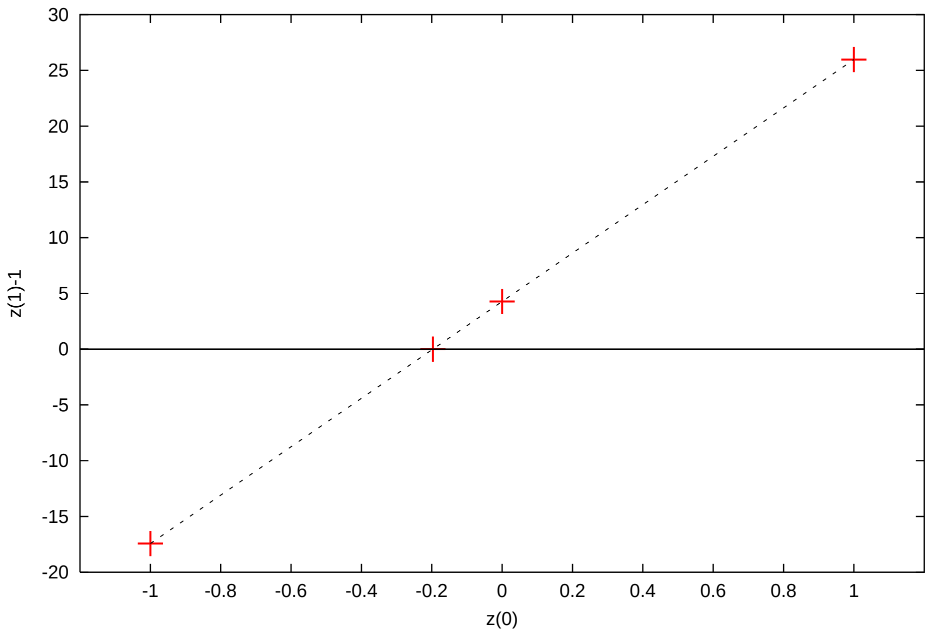
$$z(1) = 1\,. \tag{15d}$$

Metoda strzelania polega na zastąpieniu warunku (15d) przez warunek $z(0) = z_0$ i numerycznym rozwiązaniu powstałego problemu Cauchy'ego. Liczbę z_0 staram się dobrać tak, aby obliczona numerycznie wartość $z(1)$ spełniała (15d).

Wyniki metody strzelania dla problemu (15)

klasyczna czterokrokowa metoda Rungego-Kutty, $h = 1/512$





30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
z(1)-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
z(0)

Metoda strzelania i metoda Newtona

Ogólny warunek brzegowy ma postać

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(b)) = 0 \tag{16}$$

W metodzie strzelania przyjmujemy, że $\mathbf{y}_0 = \mathbf{c}$. Oznaczmy przez $\mathbf{y}(t; \mathbf{c})$ rozwiązanie problemu początkowego

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{c} \end{cases} \tag{17}$$

Metoda strzelania sprowadza się do rozwiązania następującego *równania algebraicznego* na $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{c}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{c}, \mathbf{y}(b; \mathbf{c})) = 0\,. \tag{18}$$

Równanie to będziemy rozwiązywać za pomocą metody Newtona, zadanej iteracją:

$$\mathbf{c}^{(\nu+1)} = \mathbf{c}^{(\nu)} - \left(\left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}^{(\nu)}} \right)^{-1} \mathbf{h}\left(\mathbf{c}^{(\nu)}\right) \tag{19}$$

gdzie $\mathbf{c}^{(\nu)}$ oznacza aktualne przybliżenie rozwiązania równania (18), natomiast $\partial\mathbf{h}/\partial\mathbf{c}$ oznacza jakobian.

Oznaczmy formalne argumenty $\mathbf{g}$ jako $\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, a dalej

$$\mathbf{B}_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{c}^{(\nu)}} , \quad \mathbf{B}_b = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{c}^{(\nu)}} . \tag{20}$$

W tych oznaczeniach

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}^{(\nu)}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_b \left. \frac{\partial \mathbf{y}(t;\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \right|_{x=b;\ \mathbf{c}^{(\nu)}} \tag{21}$$

Aby obliczyć ostatnią pochodną w (21), rozważmy zlinearyzowaną wersję równania (17):

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \simeq \mathbf{q}(x) + \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \dots \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{c} \end{cases} \tag{22}$$

gdzie $\mathbf{A}(x) = \partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{y}$.

Zlinearyzowany problem początkowy (22) ma rozwiązanie

$$\mathbf{y}(x; \mathbf{c}) = \mathbf{Y}(x) \left[\mathbf{c} + \int\limits_0^x \mathbf{Y}^{-1}(x')\mathbf{q}(x')\, dx' \right] \tag{23}$$

gdzie $\mathbf{Y}$ jest *rozwiązaniem fundamentalnym*, spełniającym równanie

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{Y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}(0) = \mathbb{I} \end{cases} \tag{24}$$

Zatem w najniższym rzędzie w $\mathbf{c}$*

$$\left.\frac{\partial \mathbf{y}(t;\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}}\right|_{x=b;\ \mathbf{c}^{(\nu)}} = \mathbf{Y}(b) \tag{25}$$

Ostatecznie metoda Newtona rozwiązywania równania (18) sprowadza się do iteracji

$$\mathbf{c}^{(\nu+1)} = \mathbf{c}^{(\nu)} - \left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b)\right)^{-1} \mathbf{h}\left(\mathbf{c}^{(\nu)}\right) \tag{26}$$

Jak widać, iteracja (26) wymaga nie tylko numerycznego rozwiązania równania różniczkowego (17) w każdym kroku, ale także (na ogół numerycznego) jednorazowego rozwiązania różniczkowego równania macierzowego (24). Zazwyczaj jest to *bardzo kłopotliwe*.

*Metoda Newtona jest metodą liniową — nie chcemy poprawek wyższych rzędów.

Ponadto metoda strzelania wyrónia kierunek “do przodu”, podczas gdy stabilność BVP wymaga istnienia modów stabilnych przy propagacji “do tyłu”. Co można z tym zrobić?

Metody siatkowe

Szukamy rozwiązania na $N+1$-punktowej siatce (ang. *mesh*)

$x \equiv x_0$	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_1 + h$	$\dots$	$x_N \equiv b$
$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0)$	$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(x_1)$	$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(x_2)$	$\dots$	$\mathbf{y}_N = \mathbf{y}(x_N)$

Na razie zakładamy, że “oczka” siatki są takie same.

W momencie, w którym przystępujemy do rozwiązania, *żadna* z wielkości $\mathbf{y}_n$ nie jest znana.

Niech $\mathcal{F}_n(\cdot)$ oznacza *jakąś* metodę numerycznego całkowania ODE, czyli przechodzenia z punktu n do punktu $n{+}1$; metoda jest ta sama dla wszystkich punktów, indeks oznacza tylko, że w różnych punktach mogą być różne argumenty.

BVP na zadanej siatce sprowadza się do następującego układu równań algebraicznych (w ogólności nieliniowych):

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{y}_1 & = & \mathcal{F}_1(x_1; \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N) \\ \mathbf{y}_2 & = & \mathcal{F}_2(x_2; \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N) \\ \dots & & \dots \\ \mathbf{y}_N & = & \mathcal{F}_N(x_N; \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N) \\ \multicolumn{3}{l}{\mathbf{g}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_N) = 0} \end{array} \tag{27}$$

Wybór metody

Jakie metody $\mathcal{F}$ warto rozważać?

- Szukamy rozwiązania we wszystkich punktach *jednocześnie* — nie ma sensu rozważanie punktów "wcześniejszych" — nie ma sensu stosowanie metod wielokrokowych — wybieramy metody Rungego-Kutty.
- Skoro *i tak* trzeba rozwiązywać układ równań algebraicznych, nie ma powodu, aby preferować metody jawne — wybór niejawnych metod Rungego-Kutty jest naturalny.
- Metody wieloetapowe wymagają obliczania wielu punktów pośrednich, co prowadzi do *znacznego* wzrozu wymiaru układu (27) — wybieramy metody o małej ilości punktów pośrednich (niskiego rzędu).
- Dla BVP kierunki "do przodu" i "do tyłu" są równoważne — *nie chcemy*, aby przyjęta metoda *wyróżniała* któryś kierunek — stosujemy metody symetrycznie traktujące $\mathbf{y}_n$ oraz $\mathbf{y}_{n+1}$.

Najczęściej stosowanymi metodami spełniającymi powyższe wymagania są:

niejawna metoda punktu środkowego

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{2}(\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1})\right) \tag{28}$$

i niejawna metoda trapezowa

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \tfrac{1}{2}h\left(\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})\right) \tag{29}$$

BVP i niejawna metoda punktu środkowego

Jeśli zastosujemy niejawną metodę punktu środkowego, układ równań (27) przybiera postać:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{y}_0 + h\mathbf{f}\left(x_0 + \tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{2}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1)\right) \\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_1 + h\mathbf{f}\left(x_1 + \tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{2}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)\right) \\
\dots & \quad \dots \\
\mathbf{y}_N &= \mathbf{y}_{N-1} + h\mathbf{f}\left(x_{N-1} + \tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{2}(\mathbf{y}_{N-1} + \mathbf{y}_N)\right) \\
\mathbf{g}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_N) &= 0
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Jeżeli $\mathbf{y}, \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$, (30) stanowi układ $(N+1) \times m$ nieliniowych równań algebraicznych. Zauważmy przy tym, iż poszczególne zmienne "zaczepiają" tylko o swoich najbliższych sąsiadów.

Liniowe BVP z liniowymi warunkami brzegowymi

Jeżeli interesujący nas BVP ma postać

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{q}(x) \\ \mathbf{B}_0\mathbf{y}_0 + \mathbf{B}_b\mathbf{y}_N = \mathbf{b} \end{cases} \tag{31}$$

równanie (30) staje się *układem równań liniowych*, co bardzo ułatwia jego rozwiązywanie.

Metoda punktu środkowego i układ równań liniowych

Rozważam równanie

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{q}(x) \tag{32}$$

Niejawna metoda punktu środkowego w wypadku ogólnym ma postać

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{k} \tag{33a}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{f}\left(x + \frac{1}{2}h, \mathbf{y} + \frac{1}{2}h\mathbf{k}\right) \tag{33b}$$

Po zastosowaniu do (32) dostajemy

$$\mathbf{k} = \underbrace{\mathbf{A}\left(x + \frac{1}{2}h\right)}_{\mathbf{A}_{n+1/2}} \left(\mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}\right) + \underbrace{\mathbf{q}\left(x_n + \frac{1}{2}h\right)}_{\mathbf{q}_{n+1/2}}$$

Nawiasy w $\mathbf{A}(\cdot)$ i $\mathbf{q}(\cdot)$ oznaczają *argumenty* funkcji.

$$\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}h\mathbf{A}_{\mathbf{n+1/2}}\right)\mathbf{k} = \mathbf{A}_{n+1/2}\mathbf{y}_n + \mathbf{q}_{n+1/2}$$

$$\mathbf{k} = \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}h\mathbf{A}_{n+1/2}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}_{n+1/2}\mathbf{y}_n + \mathbf{q}_{n+1/2}\right)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}h\mathbf{A}_{n+1/2}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}_{n+1/2}\mathbf{y}_n + \mathbf{q}_{n+1/2}\right)$$

$$\left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}h\mathbf{A}_{n+1/2}\right)\mathbf{y}_{n+1} = \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}h\mathbf{A}_{n+1/2}\right)\mathbf{y}_n + h\mathbf{A}_{n+1/2}\mathbf{y}_n + \mathbf{q}_{n+1/2}$$

$$\left(\mathbb{I} + \frac{1}{2}h\mathbf{A}_{n+1/2}\right)\mathbf{y}_n - \left(\mathbb{I} - \frac{1}{2}h\mathbf{A}_{n+1/2}\right)\mathbf{y}_{n+1} = -\mathbf{q}_{n+1/2}$$

Struktura macierzy, ogólny przypadek liniowy

Warunek brzegowy w (31) zapisujemy w postaci

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 + \mathbf{B}_b \mathbf{y}_N = \mathbf{b} \tag{34}$$

Wówczas macierz układu równań ma postać (dla ustalenia uwagi, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, siatka czteropunktowa)

$$\begin{bmatrix}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\
 & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
{\color{red}\bullet} & {\color{red}\bullet} & & & & & {\color{blue}\bullet} & {\color{blue}\bullet} \\
{\color{red}\bullet} & {\color{red}\bullet} & & & & & {\color{blue}\bullet} & {\color{blue}\bullet}
\end{bmatrix} \tag{35}$$

Lewy dolny róg, odpowiadający macierzy $\mathbf{B}_0$, *bardzo przeszkadza*.

Rozseparowane warunki brzegowe

Jeżeli warunki brzegowe są *rozseparowane* (patrz (2c)), macierz (35) przybiera postać

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & & & & & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & & & & & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \tag{36}$$

Jak widać, dla rozseparowanych warunków brzegowych, macierz rozwiązywanego układu równań daje się, poprzez odpowiednią permutację macierzy (i wyrazu wolnego), doprowadzić do postaci pasmowej.

Nieliniowe BVP i pseudolinearyzacja

Przypuśćmy, że rozwiązujemy ogólne, nieliowy BVP z nieliniowymi warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{y}(0),\mathbf{y}(b)) = 0 \end{cases} \tag{37}$$

Zakładając, że znamy *jakieś* przybliżenie rozwiązania, $\mathbf{y}^{(\nu)}$, chcemy je poprawić, zakładając, że różnica $\mathbf{y}^{(\nu+1)} - \mathbf{y}^{(\nu)}$ jest mała. Obliczam

$$\frac{d\mathbf{y}^{(\nu+1)}}{dx} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}^{(\nu+1)}\right) \equiv \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}^{(\nu)} + \underbrace{\mathbf{y}^{(\nu+1)} - \mathbf{y}^{(\nu)}}_{\text{poprawka}}\right)$$

$$\simeq \underbrace{\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}\right|_{\left(x,\mathbf{y}^{(\nu)}\right)}}_{\mathbf{A}(x)} \mathbf{y}^{(\nu+1)} + \underbrace{\mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}^{\nu}\right) - \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}\right|_{\left(x,\mathbf{y}^{(\nu)}\right)} \mathbf{y}^{(\nu)}}_{\mathbf{q}(x)} \qquad \text{(38a)}$$

Analogicznie rozwijamy warunek brzegowy:

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbf{g}\left(\mathbf{y}^{(\nu+1)}(0), \mathbf{y}^{(\nu+1)}(b)\right) \\
&= \mathbf{g}\left(\mathbf{y}^{(\nu)}(0) + \mathbf{y}^{(\nu+1)}(0) - \mathbf{y}^{(\nu)}(0), \mathbf{y}^{(\nu)}(b) + \mathbf{y}^{(\nu+1)}(b) - \mathbf{y}^{(\nu)}(0)\right) \\
&\simeq \underbrace{\mathbf{g}\left(\mathbf{y}^{(\nu)}(0), \mathbf{y}^{(\nu)}(b)\right) - \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{y}^{(\nu)}} \mathbf{y}^{(\nu)}(0) - \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\mathbf{y}^{(\nu)}} \mathbf{y}^{(\nu)}(b)}_{-\mathbf{b}} \\
&\quad + \underbrace{\left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{y}^{(\nu)}}}_{\mathbf{B}_0} \mathbf{y}^{(\nu+1)}(0) + \underbrace{\left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}\right|_{\mathbf{y}^{(\nu)}}}_{\mathbf{B}_0} \mathbf{y}^{(\nu+1)}(b) \qquad (38b)
\end{aligned}
$$

Równania (38) dają następujący przybliżony, liniowy BVP na kolejne przybliżenie:

$$\frac{d\mathbf{y}^{(\nu+1)}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}^{(\nu+1)} + \mathbf{q}(x)\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant b \tag{39a}$$

$$\mathbf{B}_0\mathbf{y}^{(\nu+1)}(0) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}^{(\nu+1)}(b) = \mathbf{b} \tag{39b}$$

Uwagi:

- Niekiedy, dla przyspieszenia obliczeń, jakobiany $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_b$ oblicza się co kilka iteracji (w każdej iteracji zmienia się tylko fragmenty $\mathbf{q}(x)$, $\mathbf{b}$, niezależące od jakobianów). Pozwala to zastosować tę samą faktoryzację dużej macierzy ostatecznego układu algebraicznych równań liniowych.

- Skąd wziąć pierwsze przybliżenie?
  - Zgadnąć.
  - Z metody strzelania ☺.