Generatory liczb losowych o dowolnych rozkładach prawdopodobieństwa

– Metody ogólne –

- **Metoda odwracania dystrybuanty.**
- **Metoda eliminacji.**
- **Metoda superpozycji rozkładów.**
- **Kombinacja metody superpozycji i metody eliminacji.**
- **Metoda AC.**
- **Algorytmy wielokanałowe (rozgałęzione)**

$\Rightarrow$ http://th-www.if.uj.edu.pl/˜placzek/dydaktyka/MMC/

Metoda odwracania dystrybuanty

Niech U – liczb losowa z rozkładu równomiernego na $(0,1)$, tzn. $U \in \mathcal{U}(0,1)$,

a F – funkcja ciągła i **ściśle rosnąca** oraz $F(-\infty) = 0$ i $F(+\infty) = 1$.

Wówczas zmienna losowa:

$$\boxed{X = F^{-1}(U)}$$

ma **rozkład prawdopodobieństwa o dystrybuancie** F.

Dowód: $\mathcal{P}[X \le x] = \mathcal{P}[F^{-1}(U) \le x] = \mathcal{P}[U \le F(x)] = F(x).$ $\boxtimes$

▶ Wniosek:

Jeżeli $\{U_i\}, i = 1, \ldots, n,$ – ciąg liczb losowych o rozkładzie $\mathcal{U}(0,1)$, to

$\{X_i = F^{-1}(U_i)\}, i = 1, \ldots, n,$ – **ciąg liczb losowych o rozkładzie z dystrybuantą** F.

PRZYKŁAD: Rozkład wykładniczy $E(0,1)$:

gęstość prawdopodobieństwa: $\rho(X) = e^{-X},\ X \ge 0,$

$\Rightarrow$ Dystrybuanta: $F(x) = \int_0^x e^{-X} dX = 1 - e^{-x}.$

Niech $R \in \mathcal{U}(0,1)$: $R = F(X) = 1 - e^{-X} \ \Rightarrow\ X = -\ln(1-R)$,

Jeżeli $R \in \mathcal{U}(0,1)$, to $(1-R) \in \mathcal{U}(0,1) \ \Rightarrow$ ostatecznie: $\boxed{X = -\ln R}$.

⇛ Ćw. N8.1: W oparciu o metodę odwracania dystrybuanty skonstruować generatory liczb losowych dla poniższych rozkładów, następnie wykonać histogramy i porównać z dokładnymi rozkładami.

(a) Rozkład wykładniczy $E(\theta,\lambda)$ o gęstości prawdopodobieństwa:

$$\rho_{\theta,\lambda}(X) = \frac{1}{\lambda}\,\exp\left(-\frac{X-\theta}{\lambda}\right), \quad X \geq \theta;$$

$\longrightarrow$ Wsk. Skorzystać z generatora rozkładu $E(0,1)$.

(b) Rozkład o gęstości prawdopodobieństwa:

$$\rho(X) = \frac{c}{X}$$

na przedziale $[a,b]$, gdzie: $0 < a < b < +\infty$;

$\longrightarrow$ Wsk. Najpierw wyznaczyć $c = c(a,b)$ z warunku normalizacji.

(c) Rozkład Cauchy'ego (Breita–Wignera) $C(\theta,\lambda)$ o gęstości prawdopodobieństwa:

$$\rho_{\theta,\lambda}(X) = \frac{\lambda}{\pi}\,\frac{1}{(X-\theta)^2+\lambda^2}\,, \quad -\infty < X < +\infty$$

$\longrightarrow$ Wsk. Najpierw skonstruować generator rozkładu $C(0,1)$, a natępnie dokonać odpowiedniej transformacji zmiennej.

Jeżeli F – dowolna funkcja **niemalejąca**, prawostronnie ciągła oraz $F(-\infty) = 0$ i $F(+\infty) = 1$ (czyli F jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej), to **zmienna losowa**:

$$X = \inf\{x \colon U \le F(x)\}, \quad \text{gdzie } U \in \mathcal{U}(0,1),$$

ma **rozkład o dystrybuancie** F.

Dowód:

Udowodnimy, że zdarzenie losowe $\{X \le t\}$ zachodzi $\Leftrightarrow$ zachodzi zdarzenie losowe $\{U \le F(t)\}$.

1° Niech $X = t$: z def. zmiennej losowej X jako infimum $\Rightarrow \forall_{m\in\mathbb{N}}\, \exists_{x_m} : t \le x_m < t + 1/m$ oraz $U \le F(x_m)$. Dla $m \to \infty$ mamy: $t \le x_m \to t$ (z prawej strony) $\Rightarrow U \le F(t)$ (bo dystrybuanta prawostronnie ciągła).

2° Niech $X < t$: $\exists_{y\in\{x\colon U\le F(x)\}} : y < t \;\Rightarrow\; F(y) \le F(t)$ oraz $U \le F(y) \;\Rightarrow\; U \le F(t)$.

3° Niech $U \le F(t)$, zatem $t \in \{x \colon U \le F(x)\} \;\Rightarrow\; t \ge \inf\{x \colon U \le F(x)\} = X$. ☒

PRZYKŁAD: Rozkład dyskretny:

$$\mathcal{P}[X = k] = p_k, \;\; k = 0, 1, \ldots; \quad \sum_k p_k = 1.$$

Jeżeli $R \in \mathcal{U}(0,1)$, to $\boxed{X = \min\{k : R \le \sum_{i=0}^{k} p_i\}}$.

▷ Algorytm w C/C++:

```
int generujRozkladDyskretny(double rn, double* p) {
// Generowanie rozkladu dyskretnego:
//            P{X = k} = p[k], k = 0,1,...
// rn - liczba losowa z rozkladu rownomiernego na (0,1).
  int k = 0;
  double suma = p[0];
  while (suma < rn) suma += p[++k];
  return k;
}
```

⇛ Ćw. N8.2: Korzystając z ogólnej metody odwracania dystrybuanty wygenerować rozkład dyskretny o gęstości prawdopodobieństwa:

$$\mathcal{P}(X = k) = p_k = A \sin\left(\frac{\pi}{10}\left[k + \frac{1}{2}\right]\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 9.$$

gdzie A – stała normalizacyjna (do wyznaczenia).

Wykonać histogram generowanych liczb i porównać z rozkładem dokładnym (wykres).

Zalety:

- Dokładna.
- Prosta i szybka dla niektórych rozkładów.
- Do wygenerowania zmiennej losowej o danym rozkładzie potrzebna jest tylko jedna liczba losowa o rozkładzie $\mathcal{U}(0,1)$.

Wady:

- Na ogół wymagane jest aby dystrybuanta była znana i odwracalna analitycznie $\longrightarrow$ stosunkowo niewielka liczba funkcji!
- W zasadzie, można korzystać z numerycznego całkowania funkcji gęstości prawdopodobieństwa lub ze stabelaryzowanych wartości dystrybuanty (histogram) i zamiast analitycznie, numerycznie odwracać dystrybuantę – ta metoda jest jednak zwykle znacznie wolniejsza, mniej dokładna i bardziej narażona na niestablilności numeryczne.
- Trudna do zastosowania dla rozkładów wielowymiarowych.

¶ **Dygresja:** Numeryczne odwracanie dystrybuanty

▶ Szukanie miejsca zerowego X_0 funkcji: $\mathcal{F}_U(X) \equiv F(X) - U$, gdzie $U \in \mathcal{U}(0,1)$ (np. metodami: siecznych, stycznych itd.) $\Rightarrow X_0 = F^{-1}(U)$.

I. Wariant podstawowy

Niech X – zmienna losowa o gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ na przedziale $[a,b]$,
$-\infty < a < b < +\infty$ oraz $f(x) \leq c, \ \forall_{x\in[a,b]}, \ c < +\infty$.

Schemat:

1. Generujemy punkt (U_1, U_2): $U_1 \in \mathcal{U}(a,b), \ U_2 \in \mathcal{U}(0,c)$.
2. Jeżeli $U_2 \leq f(U_1)$, to $\boxed{X = U_1}$.

   W przeciwnym razie parę (U_1, U_2) **eliminujemy** i wracamy do punktu 1.

$\Rightarrow$ Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$.

Dowód: $\mathcal{P}(X \leq t) = (b-a)c \int_a^t \frac{du_1}{b-a} \int_0^c \frac{du_2}{c} \Theta(f(u_1) - u_2) = \int_a^t du_1 \, f(u_1)$. $\boxtimes$

PRZYKŁAD: Problem ”Igły Buffona”.

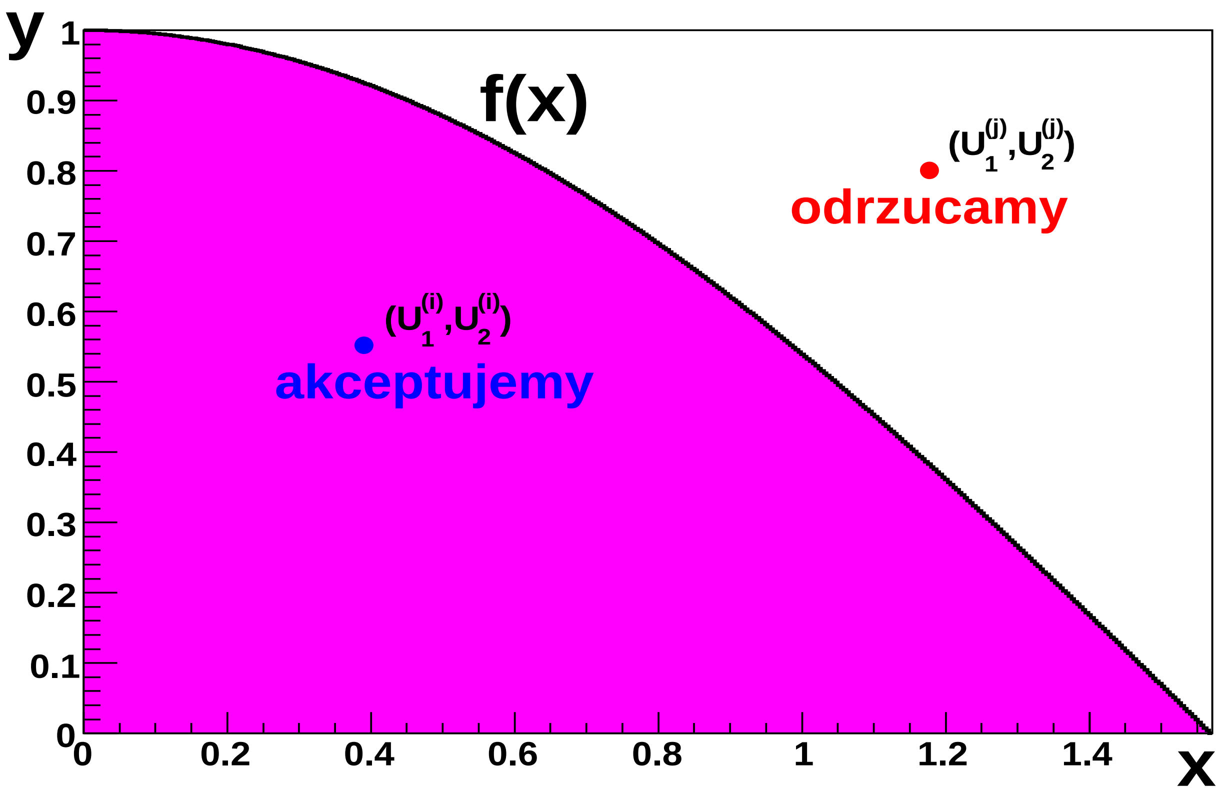
▶ Gęstość prawdopodobieństwa: $f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f(x) \leq 1$.

▷ Generujemy: $U_1 \in \mathcal{U}(0, \frac{\pi}{2}), \quad U_2 \in \mathcal{U}(0,1)$,

$$U_2 \begin{cases} \leq \cos U_1 : & X = U_1, \\ > \cos U_1 : & \text{odrzucamy } (U_1, U_2). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Otrzymujemy ciąg liczb losowych $X_1, X_2, \ldots$ wygenerowanych wg. rozkładu $f(x) = \cos x$.

Przykład metody eliminacji dla problemu „Igły Buffona”



- Generujemy punkty (U_1, U_2) z rozkładu równomiernego na prostokącie $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 1)$:
  - ▷ Punkty, które trafiają poniżej krzywej $y = f(x)$ **akceptujemy**.
  - ▷ Punkty, które trafiają powyżej tej krzywej **odrzucamy (eliminujemy)**.
  - $\longrightarrow$ Zaakceptowane punkty pokrywają równomiernie obszar pod krzywą.
  - $\Rightarrow$ Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$.

Wariant podstawowy – proste uogólnienie

Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ – m-wymiarowa zmienna losowa o gęstości $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ na zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ i $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leq c < +\infty$.

Schemat:

1. Generujemy punkt $(U_1, U_2, \ldots, U_m) \in \mathcal{U}(\Omega)$ oraz $U_{m+1} \in \mathcal{U}(0, c)$.
2. Jeżeli $U_{m+1} \leq f(U_1, \ldots, U_m)$, to $\boxed{X = (U_1, \ldots, U_m)}$.

   W przeciwnym razie **eliminujemy** wylosowany punkt i wracamy do punktu 1.

$\Rightarrow$ Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości prawdopodobieństwa $f(x_1, \ldots, x_m)$.

▶ Jak wylosować rozkład równomierny na zbiorze Ω?

▷ Najprościej:
Znaleźć taką kostkę $K^m: \quad \Omega \subset K^m$ i generować punkty równomiernie wewnątrz tej kostki, a następnie akceptować tylko te, które $\in \Omega$.

$\Rrightarrow$ Ćw. N8.3: Posługując się metodą eliminacji wygenerować rozkład dany funkcją gęstości:

$$\psi(x, y) = c\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\,, \qquad x^2 + y^2 \leq 1\,,$$

gdzie c – stała normalizacyjna (do wyznaczenia). Przy pomocy systemu ROOT wykonać dwuwymiarowy histogram generowanych punktów i porównać z rozkładem dokładnym.

Metoda eliminacji – wariant ogólny

Niech $f(x)$ – gęstość prawdopodobieństwa, według której chcemy generować punkty losowe (x może być punktem wielowymiarowym).

Schemat:

1. Znajdujemy gęstość prawdopodobieństwa $g(x)$ (tzw. **gęstość dominująca**), dla której generowanie punktów jest łatwe i szybkie (w najprostszym przypadku $g(x) = \text{const}$) oraz wyznaczamy stałą $c > 0$ tak, aby:

$$f(x) \leq c\, g(x), \ \forall_x, \qquad \longrightarrow \ \text{optymalna wartość stałej: } c = \sup_x \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

2. Generujemy punkt X według rozkładu $g(x)$ oraz liczbę losową: $U \in \mathcal{U}(0,1)$.
3. Jeżeli $c\,U\,g(X) \leq f(X)$, to akceptujemy X.
   W przeciwnym razie odrzucamy przypadek i wracamy do kroku 2.

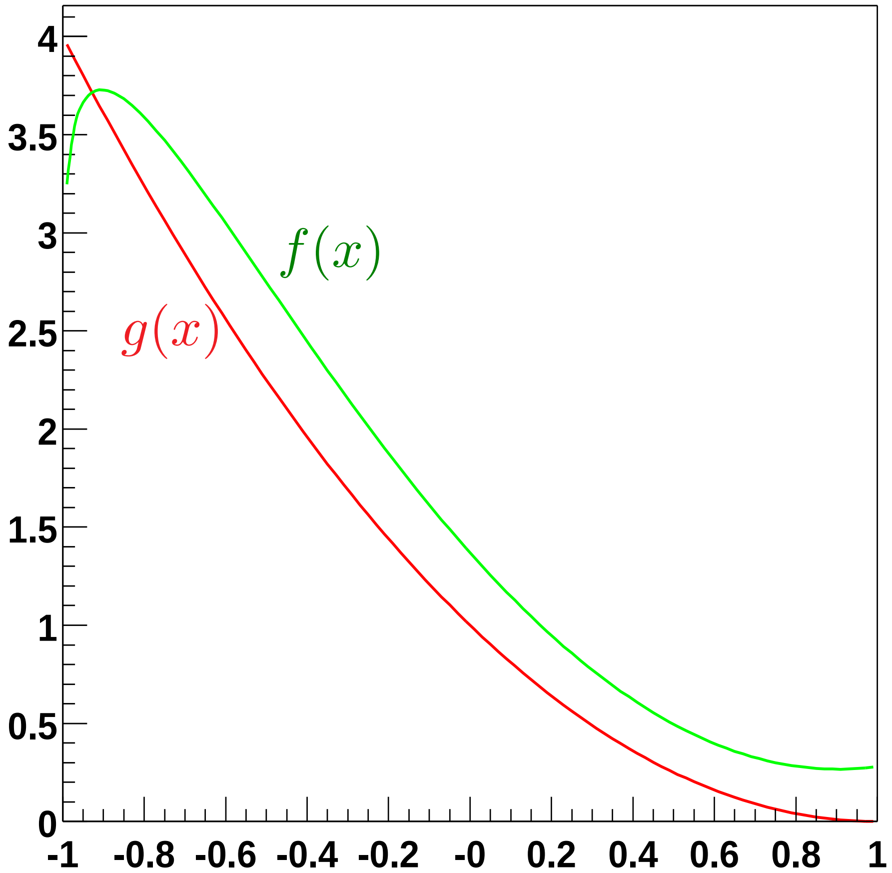
▷ Alternatywny sposób:

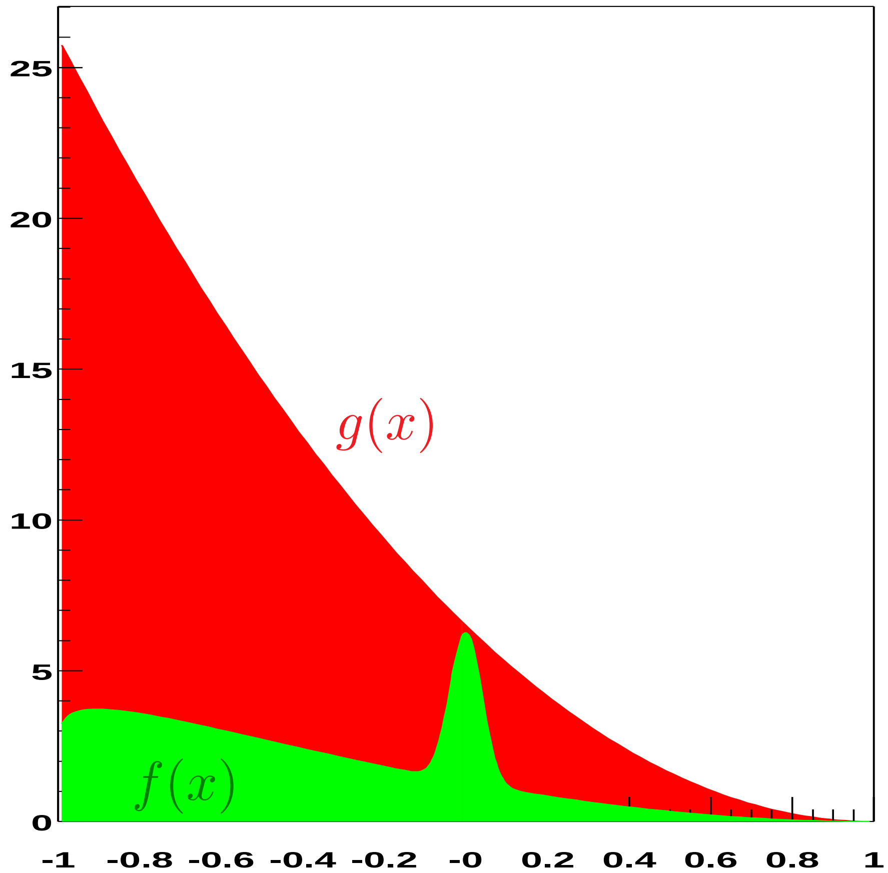
Punkt 3. Obliczamy: $w(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$ – waga przypadku; znajdujemy wagę maksymalną: w_{max}.
Jeżeli $w(X) \geq U\, w_{max}$, to akceptujemy przypadek.
W przeciwnym razie odrzucamy przypadek i wracamy do kroku 2.

▶ Jeżeli przypadki ważone są akceptowalne (np. histogramy), to możemy pominąć odrzucanie (jak również generowanie pomocniczej liczby losowej U) $\longrightarrow$ w takim przypadku z każdym punktem losowym (przypadkiem) X będzie stowarzyszona **waga** $w(X)$.

Metoda eliminacji – ograniczenia

- Zera funkcji $g(x)$ są niebezpieczne, jeżeli w tych samych punktach $f(x) \neq 0$!
- Piki $f(x)$ mogą popsuć wydajność generacji, jeżeli nie są dobrze aproksymowane przez $g(x)$!





Zera funkcji $g(x)$

$\longrightarrow$ **nieskończony ogon wagi!**

Wąskie piki funkcji $f(x)$

$\longrightarrow$ **duży współczynnik odrzucania!**

PRZYKŁAD: Dodatnia połówka rozkładu normalnego $N(0,1)$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \geq 0.$$

$\longrightarrow$ Gęstość dominująca – rozkład wykładniczy $E(0,1)$:

$$g(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

$\Longrightarrow$ Waga:

$$w(X) = \frac{f(X)}{g(X)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\frac{x(2-x)}{2}}.$$

$\Longrightarrow$ Waga maksymalna:

$$w_{\max} = w(1) = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}.$$

$\Longrightarrow$ Ćw. N8.4: Posługując się ogólną metodą eliminacji wygenerować powyższy rozkład. Wykonać histogramy dla przypadków nieważonych oraz dla przypadków ważonych i porównać je z rozkładem dokładnym.

Superpozycja ciągła

Niech X – zmienna losowa o gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$:

$$f(x) = \int g_y(x)\, h(y)\, dy\,,$$

gdzie: $g_y(x)$ – pewna gęstość prawdopodobieństwa zależna od parametru y;
$h(y)$ – pewna gęstość prawdopodobieństwa.

Schemat generacji:

1. Wygenerować Y według rozkładu o gęstości $h(y)$.
2. Dla danej wartości Y, wygenerować X według rozkładu o gęstości $g_Y(x)$.

PRZYKŁAD: $f(x) = n \int_1^{+\infty} y^{-n}\, e^{-xy}\, dy, \quad x,\, y > 0,\; n \geq 1.$

Wprowadzamy funkcje: $g_y(x) = ye^{-xy}$ i $h(y) = ny^{-(n+1)}$.

1. Liczby losowe Y o rozkładzie $h(y)$ można generować metodą odwrócenia dystrybuanty: $Y = (1-U)^{-1/n}$, gdzie $U \in \mathcal{U}(0,1)$.
2. Liczby losowe X o rozkładzie $g_y(x)$ generujemy z rozkładu wykładniczego $E(0, \frac{1}{y})$: $X = -\frac{1}{Y} \ln V$, gdzie $V \in \mathcal{U}(0,1)$.

Superpozycja dyskretna

Niech:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i\, g_i(x),$$

gdzie: p_i – gęstość pewnego rozkładu dyskretnego, tzn. $p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$;
$g_i(x)$ – gęstości pewnych rozkładów ciągłych.

Schemat generacji:

1. Wygenerować liczbę i według rozkładu o gęstości p_i, np. metodą odwrócenia dystrybuanty.
2. Dla danej wartości i wygenerować X według rozkładu o gęstości $g_i(x)$.

► Metoda ta jest nazywana także **metodą rozgałęzienia** lub **metodą wielokanałową**.

PRZYKŁAD 1: $f(x) = \frac{5}{12}\left[1 + (x-1)^4\right], \quad 0 \leq x \leq 2\,.$

$\longrightarrow\ f(x) = \frac{5}{6}\, g_1(x) + \frac{1}{6}\, g_2(x)\,,$

gdzie: $g_1(x) = \frac{1}{2}\,, \quad g_2(x) = \frac{5}{2}(x-1)^4\,,$ tzn. $p_1 = \frac{5}{6}\,, \quad p_2 = \frac{1}{6}\,.$

$$\Rightarrow X = \left\{ \begin{array}{ll} 2U_2, & U_1 < \frac{5}{6} \\ 1 + (2U_2 - 1)^{\frac{1}{5}}, & U_1 \geq \frac{5}{6} \end{array} \right\} \quad U_1, U_2 \in \mathcal{U}(0,1)\,.$$

PRZYKŁAD 2: Rozkłady o gęstościach wielomianowych

Niech:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x^i\,, \qquad 0 \le x \le 1\,,\; c_i \ge 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{i+1} = 1\,.$$

Schemat generacji:

1. Wygenerować indeks $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ według rozkładu prawdopodobieństwa $p_i = \frac{c_i}{i+1}$.
2. Dla danej wartości i wygenerować X według rozkładu o gęstości $(i+1)x^i, \quad 0 \le x \le 1$.

▶ Jak generować rozkłady: $(i+1)x^i, \quad 0 \le x \le 1$?

▷ Metodą odwrócenia dystrybuanty: $X = U^{1/(i+1)}$, gdzie $U \in \mathcal{U}(0,1)$.

▷ Za pomocą wzoru: $X = \max\{U_1, U_2, \ldots, U_{i+1}\}$, gdzie $U_1, U_2, \ldots, U_{i+1} \in \mathcal{U}(0,1)$ – niezależne zmienne losowe.

⇛ Ćw. N8.5: Posługując się metodą superpozycji rozkładów wygenerować podany w przykładzie rozkład ciągły dla kilku wartości n oraz rozkład dyskretny z przykładu 1. Wykonać histogramy generowanych liczb.

Niech X – zmienna losowa o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, f_n(x) \,, \qquad p_n \geq 0 \,, \; \sum_{i=n}^{\infty} p_n = 1 \,,$$

gdzie: $f_n(x)$ – pewne zależne od n gęstości prawdopodobieństwa.

Dla każdej f_n znajdujemy gęstość dominującą $g_n(x)$ oraz stałą $c_n > 0$, taką że:

$$f_n(x) \leq c_n \, g_n(x) \,, \; \forall_x \,.$$

Schemat generacji:

1. Wygenerować liczbę n według rozkładu prawdopodobieństwa $\mathcal{P}\{n = i\} = p_i$.
2. Dla danej wartości n wygenerować X według rozkładu o gęstości $g_n(x)$.
3. Wygenerować liczbę losową $U \in \mathcal{U}(0, 1)$.
4. Jeżeli $c_n \, U \, g_n(X) \leq f_n(X)$, to **zaakceptować** X.

   W przeciwnym razie **odrzucić** X i wrócić do kroku 1.

▷ Alternatywny sposób:

Punkt 4. Obliczyć $w_n(X) = \frac{f_n(X)}{g_n(X)}$ – waga przypadku; znaleźć wagę maksymalną: w_n^{max}.

Jeżeli $w_n(X) \geq U \, w_n^{max}$, to **zaakceptować** przypadek.

W przeciwnym razie **odrzucić** przypadek i wrócić do kroku 1.

Uwaga: Tutaj potrzebujemy wagę maksymalną dla każdej gałęzi n oddzielnie $\Rightarrow$ liczba tych wag jest równa liczbie gałęzi; ich wartości można oszacować analitycznie bądź numerycznie (np. przez histogramowanie wag dla gałęzi w próbnym przebiegu generacji).

PRZYKŁAD 1: **Rozkłady o gęstościach wielomianowych**

Niech gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x^i, \qquad 0 \leq x \leq 1\,,$$

ale $\exists_{j\in\{1,\ldots,n\}}:\ c_j < 0$.

Możemy c_j przedstawić w postaci: $c_j = c_j^+ - c_j^- :\ c_j^+,\ c_j^- > 0$.

$$\Rightarrow\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x^i \ \leq\ \sum_{i=1}^{n} c_i^+\, x^i \equiv g(x)\,.$$

- Funkcja:

$$\bar{g}(x) = \frac{g(x)}{\sum_{i=1}^{n} c_i^+}$$

jest gęstością pewnego rozkładu prawdopodobieństwa – spełnia rolę **gęstości dominującej** dla gęstości $f(x)$.

Schemat generacji:

1. Wygenerować X według rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości $\bar{g}$ (jak w metodzie dysktretnej superpozycji rozkładów).
2. Wygenerować $U \in \mathcal{U}(0,1)$.
3. Jeżeli $U g(X) \leq f(X)$, to zaakceptować przypadek.
   W przeciwnym razie odrzucić przypadek i wrócić do kroku 1.

PRZYKŁAD 2: Dodatnia połówka rozkładu normalnego $N(0,1)$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \;\; x \geq 0\,.$$

Przedstawiamy tę gęstość w postaci:

$$f(x) = \alpha_1\, g_1(x)\, h_1(x) + \alpha_2\, g_2(x)\, h_2(x)\,,$$

gdzie:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,, \qquad\qquad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

$$g_1(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 \leq x \leq 1\,, \\ 0\,, & x > 1\,, \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} 2\,e^{-2(x-1)}\,, & x \geq 1\,, \\ 0\,, & 0 \leq x < 1\,, \end{cases}$$

$$h_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \qquad h_2(x) = e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\,.$$

▶ Zmienną losową X generujemy:

(a) z prawdopodobieństwem $\alpha_1/(\alpha_1+\alpha_2) = 2/3$ według rozkładu o gęstości g_1 i dokonujemy eliminacji według funkcji h_1 , $\longrightarrow$ tzn. akceptacja dla: $h_1(X) \geq U \in \mathcal{U}(0,1)$,

(b) z prawdopodobieństwem $\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2) = 1/3$ według rozkładu o gęstości g_2 i dokonujemy eliminacji według funkcji h_2 , $\longrightarrow$ tzn. akceptacja dla: $h_2(X) \geq U \in \mathcal{U}(0,1)$.

$\Rrightarrow$ Ćw. 8.6: Wygenerować powyższy rozkład. Wykonać histogram generowanych liczb losowych i porównać z rozkładem dokładnym.

▶ **W praktycznych obliczeniach Monte Carlo zwykle stosuje się kombinacje wielu metod generowania rozkładów liczb losowych (często postępując drogą kolejnych uproszczeń).**

Metoda AC (*ang. acceptance–complement*, Kronmal i Peterson, 1981)

Niech $f = f_1 + f_2$ – gęstość zmiennej losowej X oraz $p = \int f_1(x)\,dx$.
$\Longrightarrow$ f_1/p i $f_2/(1-p)$ – gęstości pewnych rozkładów prawdopodobieństwa.

▶ Jeżeli funkcje f_1 i f_2 są tak dobrane, że łatwo możemy wygenerować:

- liczby losowe o rozkładzie z gęstością f_1/p metodą eliminacji z gęstością dominującą g,
- liczby losowe o rozkładzie z gęstością $f_2/(1-p)$.

<u>Schemat generacji:</u>

1. Wygenerować X według rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości g.
2. Wygenerować $U \in \mathcal{U}(0,1)$.
3. Jeżeli $U g(X) > f_1(X)$, to wygenerować X według rozkładu prawdopodobieństwa o gęstości $f_2/(1-p)$. $\longrightarrow$ bo $\int [g(x) - f_1(x)]\,dx = 1 - p = \int f_2(x)\,dx$.
4. Zwrócić X.

▶ Szczególnie prosty i szybki, gdy $f_2 = \mathrm{const}$.

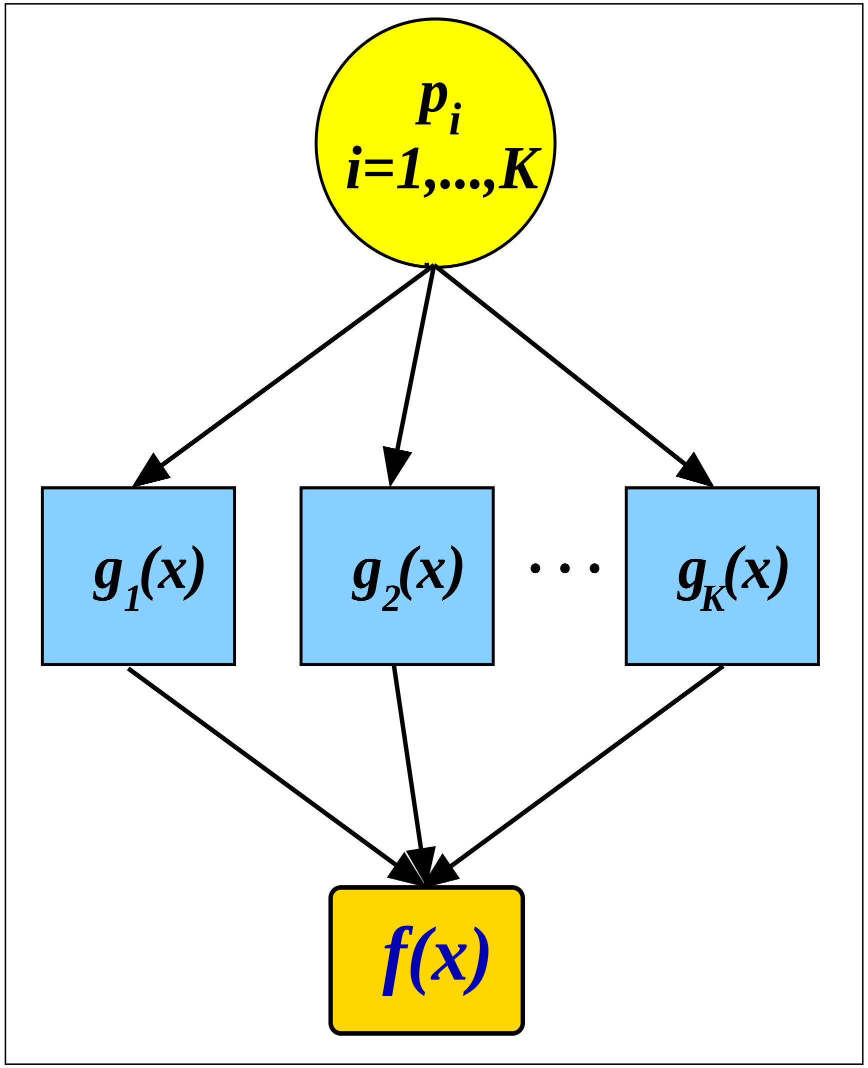
▷ Np. funkcja f odcięta od zera, tzn. $\inf_x f(x) > 0$, wówczas można wziąć: $f_2 = \inf_x f(x)$.

▷ $f_2 = c\,\delta(x - x_0)$, tzn. rozkład dyskretny jednopunktowy (w kroku 3. bierzemy: $X = x_0$).

Algorytmy wielokanałowe (rozgałęzione)

Metoda superpozycji:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{K} p_i \, g_i(x)$$



Kombinacja superpozycji i eliminacji:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{K} p_i \, f_i(x)$$