

Komputerowa analiza zagadnień różniczkowych

3. O tym, co można ustalić analitycznie

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

2013

Nie ma ogólnych metod rozwiązywania
nieliniowych równań różniczkowych.



Równania o zmiennych rozdzielonych

Równanie postaci ($y, p, q \in \mathbb{R}$, zakładamy, że spełnione są założenia twierdzenia Picarda)

$$\frac{dy}{dx} = p(y)q(x) \quad (1)$$

rozwiązujemy jako

$$\int \frac{dy}{p(y)} = \int q(x)dx + C \quad (2)$$

gdzie C jest stałą całkowania. Wartość C wyznaczamy z warunków początkowych.

Uwaga: Nie zwracamy uwagi, czy zależność $y(x)$ można wyznaczyć z równania (2) w sposób jawny.

Wszystkie przypadki:

$$\frac{dy}{dx} = -2yx \implies y(x) = y_0 e^{-x^2} \quad (3a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - e^{-y}} \implies y^2 + e^{-y} = x + C \quad (3b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin y} \implies \int \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin y}} = x + C \quad (3c)$$

uznajemy za *całkowalne w kwadraturach*, mimo że $y(x)$ jest w (3b) dana w sposób niejawny, a całka w (3c) jest nieelementarna.

Przykład: Równanie logistyczne

Rozpatrzmy problem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ry(Y - y) & (r = \text{const} > 0, Y = \text{const} > 0) \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases} \quad (4)$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.

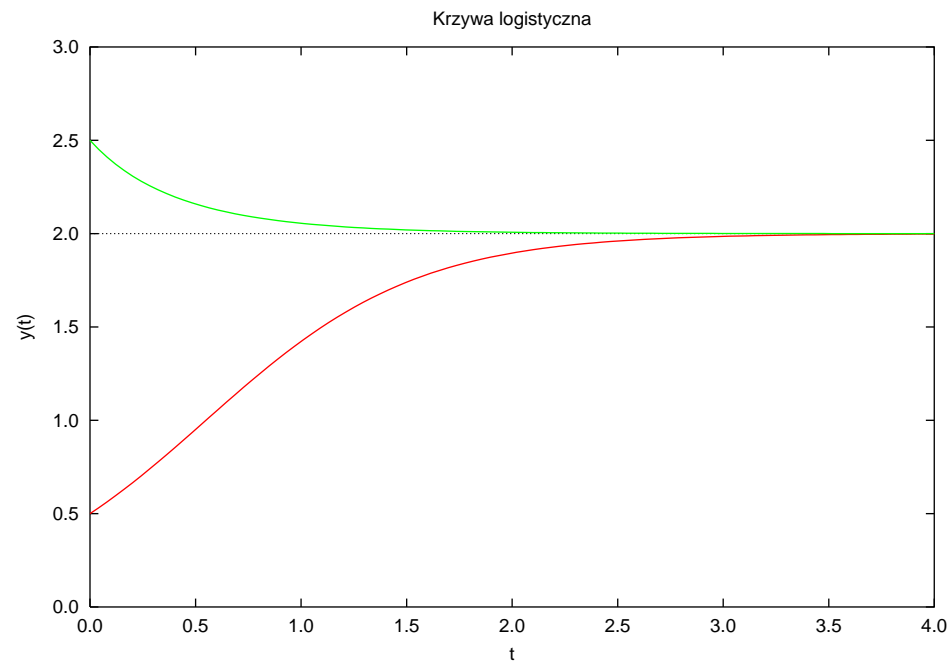
$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y(Y-y)} &= \int r dt \\ \frac{1}{Y} \int \frac{dy}{y} + \frac{1}{Y} \int \frac{dy}{Y-y} &= rt + C \\ \frac{1}{Y} \ln y - \frac{1}{Y} \ln(Y-y) &= rt + C \\ \ln \frac{y}{Y-y} &= Yrt + YC \\ \frac{y}{Y-y} &= C'e^{Yrt} \\ y &= \frac{YC'e^{Yrt}}{1 + C'e^{Yrt}} = \frac{Y}{1 + C''e^{-Yrt}}\end{aligned}$$

Stałą C'' wyznaczam z warunku początkowego:

$$y_0 = y(0) = \frac{Y}{1 + C''} \implies C'' = \frac{Y - y_0}{y_0}$$

Ostatecznie

$$y(t) = \frac{Y}{1 + \frac{Y-y_0}{y_0} e^{-Yrt}}$$



Całkowanie metodą podstawiania

Niekiedy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5)$$

daje się sprowadzić do “rozwiązywalnej” postaci metodą podstawiania.

Przykład

Rozpatruję równanie

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad (6)$$

Przyjmuję $z = ax + by + c \implies \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$. Wstawiając to do (6) dostaję równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$\frac{dz}{dx} = a + b f(z). \quad (7)$$

Przykład

Równanie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + x + \sin y}{\cos y} \quad (8)$$

daje się sprowadzić do prostej postaci po podstawieniu $u = x + \sin y \implies$
 $\frac{du}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx} + 1$. Ostatecznie

$$\frac{du}{dx} = -u. \quad (9)$$

Równania jednorodne*

Równania postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (10)$$

całkuje się przez podstawienie $y = xz$. Wówczas $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$. Podstawiając do (10) dostaję równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}. \quad (11)$$

Także równania postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (12)$$

daje się sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych.

*Nie mylić z liniowymi równaniami jednorodnymi!

Równanie Bernoulliego

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n \quad (13)$$

Jeżeli $n = 0$ lub $n = 1$, równanie (13) jest liniowe. W przeciwnym wypadku używam podstawienia

$$y^{1-n} = z \Rightarrow (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n} \cdot \frac{dz}{dx} \quad (14)$$

Równanie (13) przechodzi w równanie liniowe

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x)z. \quad (15)$$

Równanie Riccatiego

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (16)$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli $y_1(x)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania Riccatiego, to podstawienie*

$$y = y_1(x) + \frac{1}{z} \quad (17)$$

sprawdza równanie (16) do równania liniowego

$$\frac{dz}{dx} + (2a(x)y_1(x) + b(x))z = -a(x). \quad (18)$$

Dowód jest prosty i polega na wykonaniu odpowiedniego podstawienia. Jeżeli $C\gamma(x) + \delta(x)$ jest całką ogólną równania (18) (C jest stałą dowolną), całką ogólną równania (16) jest

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{C\gamma(x) + \delta(x)}. \quad (19)$$

Równanie Clairauta

$$y - x \frac{dy}{dx} - f\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad (20)$$

gdzie f jest funkcją różniczkowalną, różną od stałej. Po zróżniczkowaniu (20) otrzymujemy

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left[x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right) \right] = 0 \quad (21)$$

a zatem albo $y'' = 0$, albo $x + f'(y') = 0$. W pierwszym z tych wypadków jako rozwiązanie otrzymujemy rodzinę prostych

$$y = cx + f(c), \quad (22)$$

drugi, wraz z równaniem rodziny prostych (22), daje obwiednię tej rodziny; to rozwiązanie zwane jest *całką osobliwą*.

Przykład

Rozwiązaniami równania

$$y - xy' + \frac{1}{2}y'^2 = 0 \quad (23)$$

są proste

$$y = cx - \frac{1}{2}c^2. \quad (24)$$

Całka osobliwa musi spełniać

$$x + f'(cx + f(c)) \equiv x - c = 0 \quad (25)$$

Eliminując c z (24),(25), otrzymujemy obwiednię

$$y = \frac{1}{2}x^2. \quad (26)$$

Każda prosta (24) jest styczna do tej obwiedni.

Pewne jedowymiarowe równania stopnia drugiego...

...ważne ze względu na zastosowania w fizyce:

1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad (27a)$$

Daje się rozwiązać poprzez dwa całkowania, $y = \int (\int f(x) dx) dx + c_1x + c_2$.

2.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y) \quad (27b)$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$, co prowadzi do równania o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{2 \int f(y) dy + c_1}.$$

3.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (27c)$$

Podstawienie $\frac{dy}{dx} = p$ sprowadza to równanie do równania rzędu pierwszego

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (27d)$$

Podstawiamy $\frac{dy}{dx} = q(y)$, skąd otrzymujemy równanie rzędu pierwszego

$$q \frac{dq}{dy} = f(y, q)$$

Całki pierwsze równania różniczkowego — niezmienniki

Niech dany będzie problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (28)$$

posiadający jednoznaczne rozwiązanie w pasie $0 \leq x \leq X$; $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$.

Całką pierwszą — lub **niezmiennikiem** — równania (28) nazywam dowolną funkcję

$$\Phi(x, \mathbf{y}(x)) \quad (29)$$

która jest stała w pasie $0 \leq x \leq X$, przy czym $\mathbf{y}(x)$ jest rozwiązaniem problemu (28).

Przykład

Dany jest problem Cauchy'ego

$$\dot{x} = u \quad (30a)$$

$$\dot{u} = -\omega^2 x \quad (30b)$$

z warunkami początkowymi $x(0) = x_0, u(0) = u_0$. Wówczas funkcja

$$H(x, u) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \quad (31)$$

jest całką ruchu. Istotnie,

$$\dot{H} = u\dot{u} + \omega^2 x\dot{x} = u(-\omega^2 x) + \omega^2 xu = 0. \quad (32)$$

Wartość całki ruchu jest zadana przez warunki początkowe. Jeśli znamy całkę ruchu i warunki początkowe, moglibyśmy wyeliminować jedną zmienną

— obniżyć stopień układu o jeden. (Gdybyśmy znali dwie całki ruchu, moglibyśmy obniżyć stopień o dwa itd.) Kontynuując poprzedni przykład, $H(x(0), u(0)) = \frac{1}{2}u_0^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2 = E$, a ponieważ wartość $H(x, u)$ musi być zachowana, dostajemy

$$u = \pm\sqrt{2E - \omega^2 x^2}, \quad (33)$$

a zatem układ równań (30) sprowadza się do *jednego* równania

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2E - \omega^2 x^2}. \quad (34)$$

Dowolność wyboru znaku w (34) odpowiada temu, że wyjściowy układ równań ma dwa niezależne rozwiązania.

Całki ruchu (niezmienniki) pozwalają obniżyć stopień układu równań. W praktyce numerycznej staramy się *unikać* takiego postępowania.

Punkty stacjonarne i stabilność

Rozważmy autonomiczne[†] równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \quad (35)$$

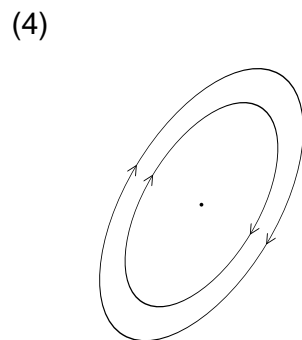
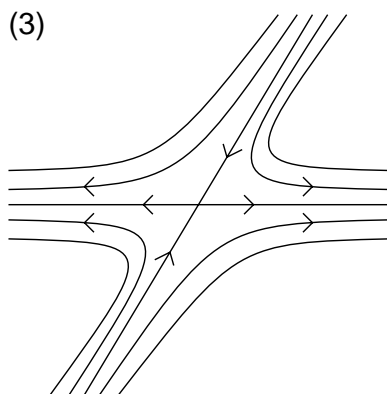
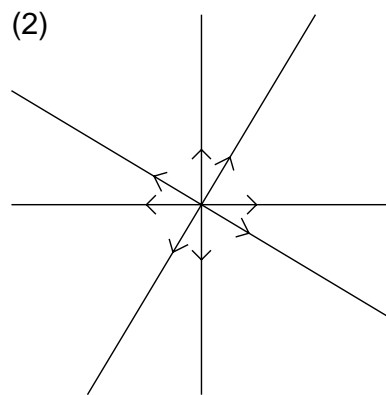
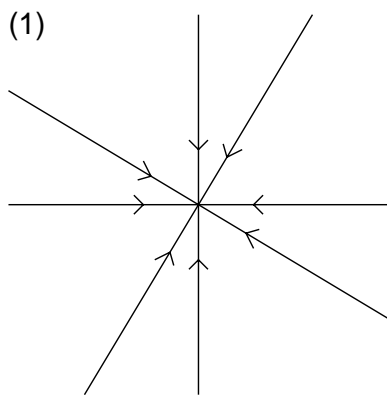
Punktem stacjonarnym równania (35) nazywam takie y^* , że $f(y^*) = 0$. Punkt stacjonarny jest rozwiązaniem równania (35). Czy jest to rozwiązanie stabilne? Przyjmijmy $y(t) = y^* + \varepsilon(t)$, $\|\varepsilon\| \ll 1$. Wówczas z równania (35) otrzymujemy

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{J}\varepsilon, \quad (36)$$

gdzie $\mathbf{J} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y^*}$. Rozwiązanie $y = y^*$ jest stabilne, jeśli wszystkie wartości własne macierzy \mathbf{J} mają mniejsze od zera części rzeczywiste.

[†]To znaczy takie, w którym prawa strona nie zależy jawnie od zmiennej niezależnej.

Klasyfikacja punktów stacjonarnych w \mathbb{R}^2



(1) $\text{Re } \lambda_1 < 0, \text{Re } \lambda_2 < 0$ (ognisko przyciągające)

(2) $\text{Re } \lambda_1 > 0, \text{Re } \lambda_2 > 0$ (ognisko odpychające)

(3) $\text{Re } \lambda_1 > 0, \text{Re } \lambda_2 < 0$ (siodło)

(4) $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$

gdzie $\lambda_{1,2}$ oznaczają wartości własne jacobianu $\mathbf{J}|_{y^*}$.

Lokalna teoria bifurkacji

Rozważamy układ równań różniczkowych

$$\frac{dy}{dx} = f(y, r) \quad (37)$$

gdzie r jest pewnym parametrem. Niech y^* będzie punktem stacjonarnym tego równania, który może zależeć od r . Jeżeli przy pewnej wartości parametru r , jedna (lub więcej) wartość własna jakobianu w punkcie stacjonarnym ma **zerową część rzeczywistą**, zmienia się stabilność rozwiązań. Mówimy, że w takim punkcie dochodzi do **bifurkacji**.

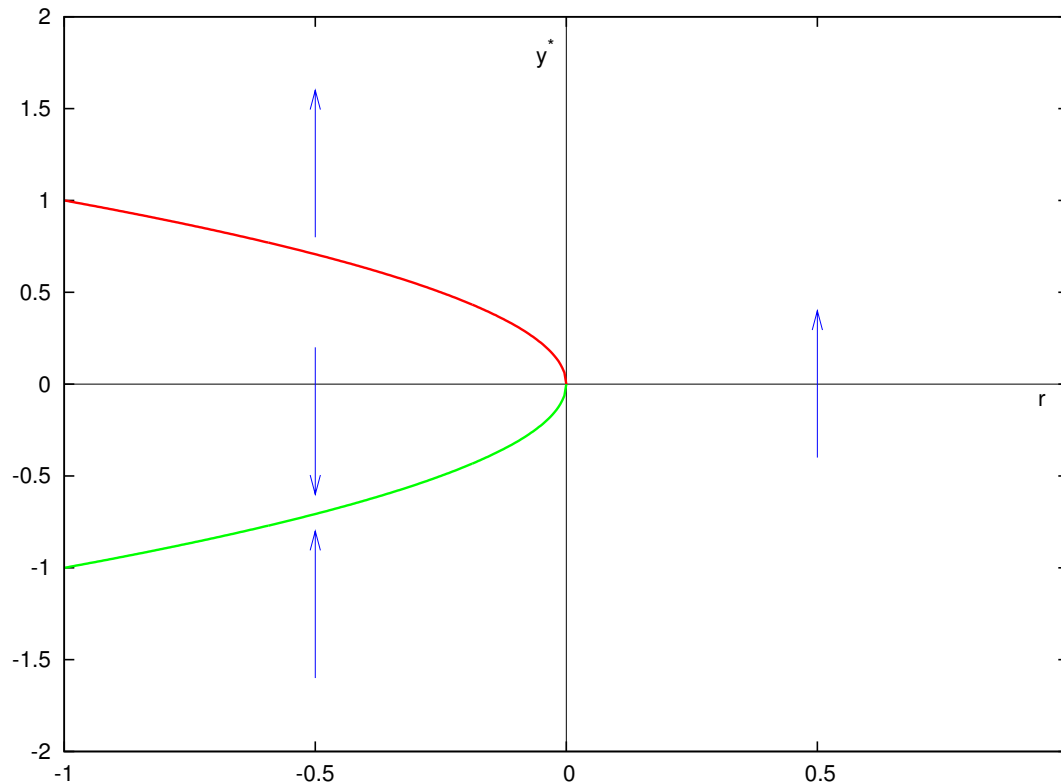
Najłatwiej prześledzić to na przykładach jednowymiarowych.

Bifurkacja punktu siodłowego, bifurkacja styczna

Rozważamy równanie

$$\frac{dy}{dx} = r + y^2 \quad (38)$$

- Jeżeli $r < 0$, są dwa punkty stacjonarne: **stabilny** $y^* = -\sqrt{-r}$ i **nie-stabilny** $y^* = \sqrt{-r}$.
- Jeżeli $r = 0$, jest tylko jeden punkt stacjonarny $y^* = 0$, zwany punktem siodłowym.
- Jeżeli $r > 0$, nie ma punktów stacjonarnych.



Bifurkacja styczna. Diagram bifurkacyjny dla równania (38), pokazujący **stabilne** i **niestabilne** punkty stacjonarne w zależności od parametru kontrolnego, r . Strzałki pokazują asymptotyczne zachowanie rozwiązań w poszczególnych obszarach.

Przykład

Układ równań

$$\frac{du}{dx} = \alpha - u^2 \quad (39)$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \quad (40)$$

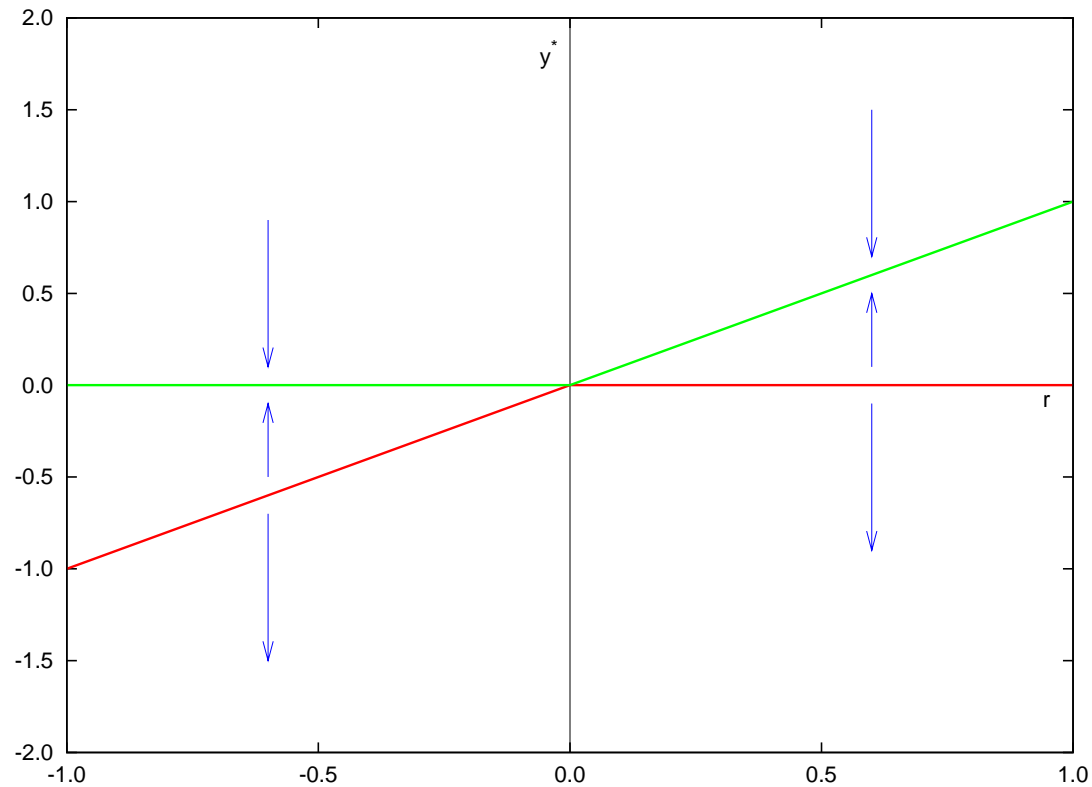
wykazuje bifurkację punktu siodłowego przy przejściu parametru α przez zero.

Bifurkacja transkrytyczna

Rozważmy równanie

$$\frac{dy}{dx} = ry - y^2 \quad (41)$$

Równanie to ma dwa punkty stacjonarne, $y^* = 0$ oraz $y^* = r$. Jeżeli $r < 0$, pierwszy z nich jest **stabilny**, drugi **niestabilny**. Jeżeli $r > 0$, pierwszy z nich jest **niestabilny**, drugi **stabilny**. Punkty stacjonarne “zamieniają się stabilnością” przy przejściu parametru r przez zero.



Bifurkacja transkrytyczna. Diagram bifurkacyjny dla równania (41), pokazujący **stabilne** i **niestabilne** punkty stacjonarne w zależności od parametru kontrolnego, r . Strzałki pokazują asymptotyczne zachowanie rozwiązań w poszczególnych obszarach.

Bifurkacja rozszczepienia (“widelcowa”, pitchfork)

A. Przypadek nadkrytyczny (ang. *supercritical*):

$$\frac{dy}{dx} = ry - y^3 \quad (42)$$

Dla $r < 0$ istnieje tylko jeden punkt stacjonarny $y^* = 0$, który jest **stabilny**.
Dla $r > 0$ ten punkt rozszczepia się na dwa **stabilne** punkty stacjonarne $y^* = \pm\sqrt{r}$. Punkt $y^* = 0$ nadal jest stacjonarny, ale staje się **niestabilny**.

B. Przypadek podkrytyczny (ang. *subcritical*):

$$\frac{dy}{dx} = ry + y^3 \quad (43)$$

Dla $r < 0$ istnieją trzy punkty stacjonarne: dwa **niestabilne** $y^* = \pm\sqrt{-r}$ oraz **stabilny** $y^* = 0$. Dla $r > 0$ istnieje tylko jeden punkt stacjonarny $y^* = 0$, **niestabilny**.

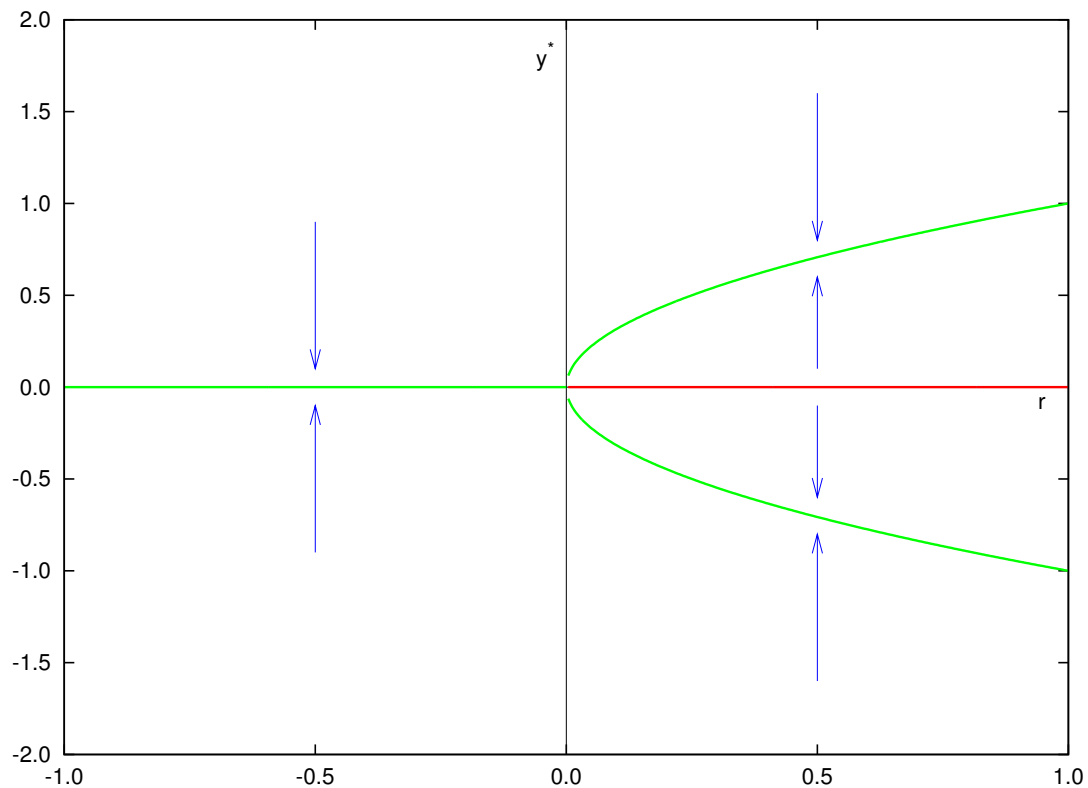
Asymptotyczne zachowanie rozwiązań

Rozważmy problem Cauchy'ego odpowiadający bifurkacji nadkrytycznej:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = ry - y^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (44)$$

Jeżeli $r < 0$, to wszystkie trajektorie dążą do $y^* = 0$.

Jeżeli $r > 0$, to trajektorie startujące z $y_0 > 0$ dążą do $y^* = +\sqrt{r}$, trajektorie startujące z $y_0 < 0$ dążą do $y^* = -\sqrt{r}$. Trajektorie startujące z $y_0 = 0$ (punkt stacjonarny!) pozostają w tym punkcie, ale uciekają z niego przy dowolnie małym zaburzeniu.



Bifurkacja nadkrytyczna. Diagram bifurkacyjny dla równania (42), pokazujący **stabilne** i **niestabilne** punkty stacjonarne w zależności od parametru kontrolnego, r . Strzałki pokazują asymptotyczne zachowanie rozwiązań w poszczególnych obszarach.

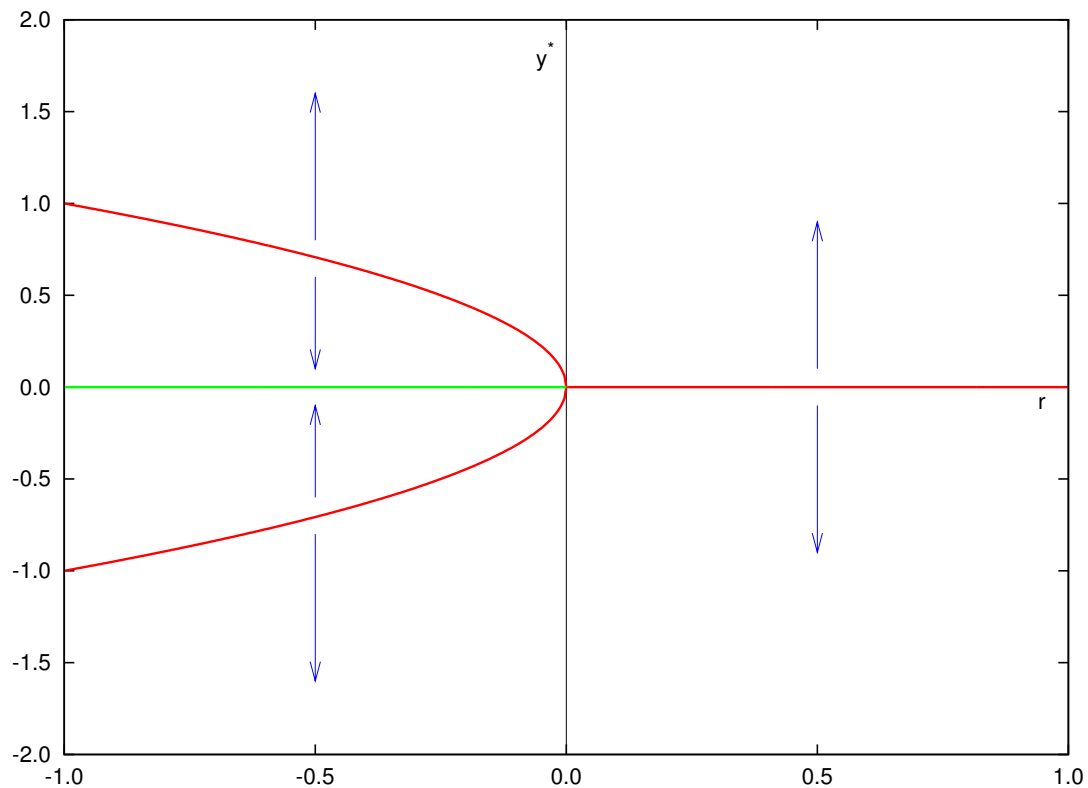
Ciekawszy jest problem Cauchy'ego odpowiadający bifurkacji podkrytycznej:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = ry + y^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (45)$$

Dla $r < 0$, trajektorie startujące z y_0 takiego, że $|y_0| < \sqrt{-r}$, dążą do $y^* = 0$. Trajektorie z $|y_0| > \sqrt{-r}$ uciekają do $\pm\infty$, w zależności od znaku warunku początkowego.

Dla $r > 0$, trajektorie startujące z $y_0 \neq 0$ uciekają do $\pm\infty$, w zależności od znaku warunku początkowego.

We wszystkich przypadkach trajektorie startujące z niestabilnych punktów stacjonarnych, pozostają na nich.



Bifurkacja podkrytyczna. Diagram bifurkacyjny dla równania (43), pokazujący **stabilne** i **niestabilne** punkty stacjonarne w zależności od parametru kontrolnego, r . Strzałki pokazują asymptotyczne zachowanie rozwiązań w poszczególnych obszarach.

Równania Newtona

Równania postaci

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - F(x) = 0, \quad (46a)$$

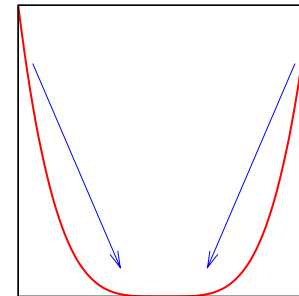
które zawsze można przedstawić jako

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \frac{dU(x)}{dx}, \quad (46b)$$

opisują tłumiony ($\gamma > 0$) ruch w polu siły o potencjale $U(x)$, gdzie siła tarcia jest proporcjonalna do prędkości, ale przeciwnie skierowana.

Ujemne tarcie ($\gamma < 0$) odpowiada układowi wybuchającemu.

Przykład: Równanie $\ddot{x} + \gamma x + x^3 = 0$ opisuje tłumiony ruch w potencjale $U(x) = \frac{1}{4}x^4$.



Wielowymiarowe równania Newtona

Powyższy problem możemy uogólnić na przypadek wielowymiarowy

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad (47)$$

gdzie $\mathbf{M}, \mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{x}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^N$, jeżeli

1. Istnieje taka funkcja $U(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, że $\mathbf{F} = \left[-\frac{\partial U}{\partial x_1}, -\frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial U}{\partial x_N} \right]^T$ (“siła to minus gradient potencjału”);
2. Macierze $\mathbf{M}, \mathbf{\Gamma}$ są symetryczne i dodatnio określone.

W takim wypadku równanie (47) opisuje fizyczny, tłumiony ruch układu cząstek oddziałujących pewnym potencjałem.

Cykl graniczny

Zastanówmy się, czy umiemy *jakościowo* przeanalizować asymptotyczne ($t \gg 1$) rozwiązania równania

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x^4 - 1 \right] \frac{dx}{dt} + x^3 = 0. \quad (48)$$

Zdefiniujmy

$$\gamma(x, \dot{x}) = 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x^4 - 1. \quad (49)$$

Równanie (48) jest równaniem ruchu w potencjale $\frac{1}{4}x^4$ z “tarcie” $\gamma(x, \dot{x})$, zależnym od położenia i prędkości.

Zauważmy, że

- Punkt $(x = 0, \frac{dx}{dt} = 0)$ jest punktem stacjonarnym równania (48).
- Jeżeli $\gamma(x, \dot{x}) > 0$, układ jest tłumiony w stronę punktu stacjonarnego.
- Jeżeli $\gamma(x, \dot{x}) < 0$, układ wybucha.
- Jeżeli $|x| \ll 1$ oraz $|\frac{dx}{dt}| \ll 1$, to $\gamma(x, \dot{x}) < 0$ i układ jest odpychany od punktu stacjonarnego.
- Jeżeli $|x| \gg 1$ lub $|\frac{dx}{dt}| \gg 1$, to $\gamma(x, \dot{x}) > 0$ i układ jest ściągany w stronę punktu stacjonarnego.

Jako jedyna interesująca możliwość pozostaje

$$2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x^4 - 1 = 0. \quad (50)$$

Jeżeli zachodzi (50), równanie (48) redukuje się do

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 = 0. \quad (51)$$

Różniczkując (50) dostajemy

$$0 = 4 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 4x^3 \cdot \frac{dx}{dt} = 4 \frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 \right) \quad (52)$$

Widzimy zatem, że jeżeli zachodzi (50), to albo $\frac{dx}{dt} = 0$, co zachodzi na niestabilnym punkcie stacjonarnym, albo spełnione jest równanie (51). Ponieważ równanie to jest zgodne z równaniem (48) przy założeniu (50), widzimy, że **równanie (50) jest krzywą całkową równania (48)**. Rozwiązanie tego typu nazywamy **cyklem granicznym**. Cykl graniczny opisuje tak naprawdę *dwa* rozwiązania, różniące się kierunkiem obiegu.

Stabilność cyklu granicznego

Czy znaleziony cykl graniczny jest stabilny? Załóżmy, że spełnione jest równanie (50). Zaburzamy rozwiązanie $x(t) \rightarrow x(t) + \varepsilon(t)$, przy czym zakładamy, że $|\varepsilon(t)| \ll 1$. Wstawiamy zaburzone rozwiązanie do *wyjściowego* równania (48):

$$\ddot{x} + \ddot{\varepsilon} + [2(\dot{x} + \dot{\varepsilon})^2 + (x + \varepsilon)^4 - 1] (\dot{x} + \dot{\varepsilon}) + (x + \varepsilon)^3 = 0 \quad (53a)$$

$$\ddot{x} + \ddot{\varepsilon} + [2(\dot{x})^2 + 4\dot{x}\dot{\varepsilon} + x^4 + 4x^3\varepsilon - 1] (\dot{x} + \dot{\varepsilon}) + x^3 + 3x^3\varepsilon = 0 \quad (53b)$$

Wyrazy wyróżnione kolorami zerują się.

$$\ddot{\varepsilon} + 4(\dot{x}\dot{\varepsilon} + x^3\varepsilon)(\dot{x} + \dot{\varepsilon}) + 3x^2\varepsilon = 0 \quad (53c)$$

$$\ddot{\varepsilon} + 4(\dot{x})^2\dot{\varepsilon} + x^2(4\dot{x}x + 3)\varepsilon = 0 \quad (53d)$$

Zauważmy teraz, że jeżeli spełnione jest równanie (50), to $x \in [-1, 1]$, $\dot{x} \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Wobec tego

$$|4\dot{x}x| \leq 4|\dot{x}| \leq \frac{4}{\sqrt{2}} < 3 \Rightarrow 4\dot{x}x + 3 > 0, \quad (54)$$

a wobec tego równanie (53d) **jakościowo** zachowuje się jak równanie tłumionego oscylatora harmonicznego, a zatem *zaburzenie $\varepsilon(t)$ jest ściągane do zera*. Oznacza to, że znaleziony cykl graniczny jest stabilny.